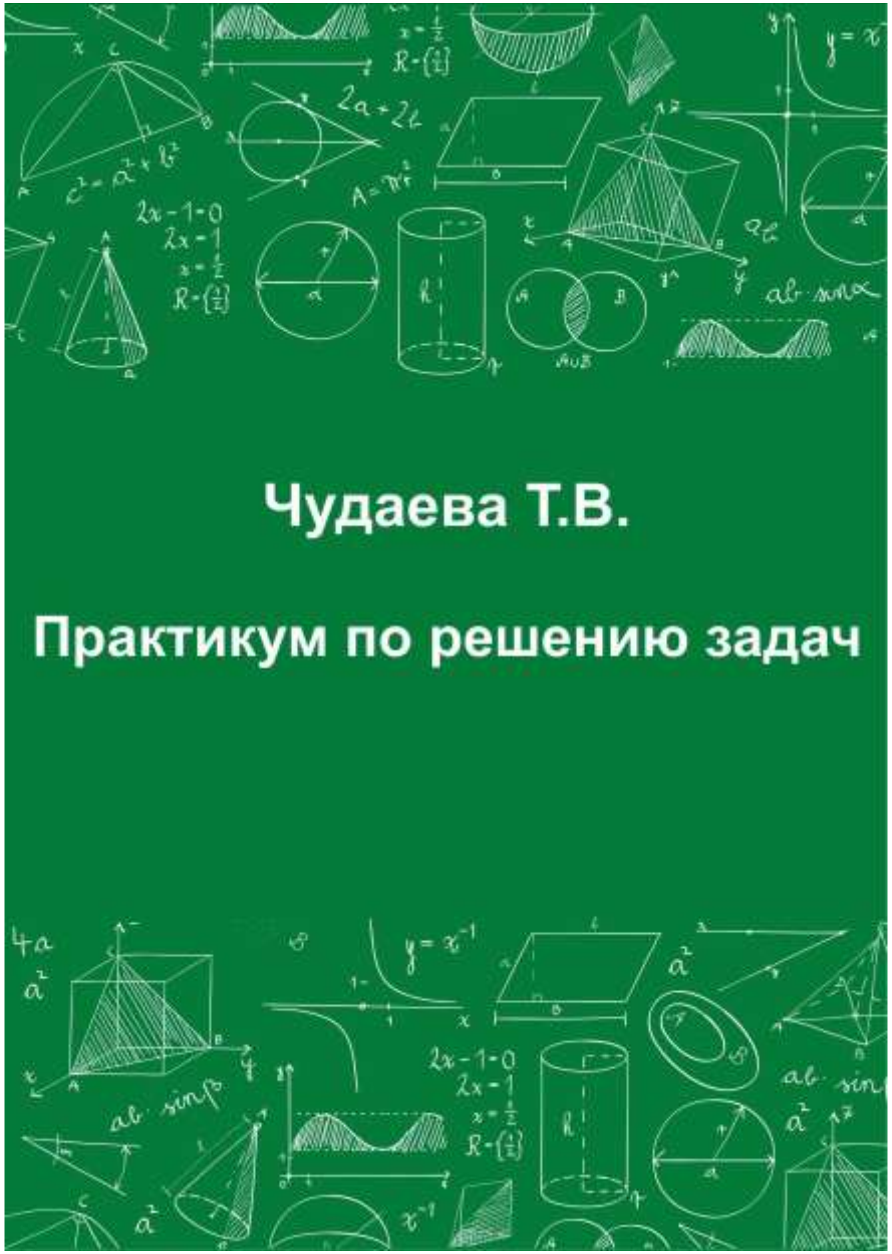


Чудаева Т. В. Практикум по решению задач. [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие /Т В. Чудаева. – Барнаул : КГБПОУ «АПТ», 2019.-32 с
Пособие разработано в соответствии с программой курса «ЕН.01 Математика».
 Оно предназначено для организации самостоятельной работы студентов 3-го курса специальности «Дизайн (по отраслям)»,

В пособии содержатся задачи различного уровня сложности по основным разделам .Для каждой задачи в чёткой и доступной форме с использованием современных математических символов изложены методики, позволяющие понять и усвоить приемы решения задач различных типов.

Раздел 1. Основы математического анализа

Содержание:

Числовые последовательности. Функция одной переменной.

Предел функции. Два замечательных предела.. Непрерывность функции. Сложная функция. Производная функции.

Производная второго порядка Производная сложной функции.

Дифференциал функции. Свойства дифференциала функции.

Применение производных в исследование функций. Схема исследования функций

Числовые последовательности. Функция одной переменной.

Предел функции. Два замечательных предела..

Задание 1. Вычислить пределы функций

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2}{x^3-1}=\frac{2\cdot 2^2}{2^3-1}=\frac{8}{7}$$

Применяя теорему о действиях над пределами функций вместо **x** подставляем 2,получим ответ равный 8/7

Задание 2:

$$\lim_{x\to 1}\frac{5}{x-1}=\frac{5}{1-1}=\left(\frac{5}{0}\right)=\infty$$

Задание 3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x+4}{1+3x^2-x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+4}{\frac{1}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}-\frac{x^3}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x}-1}=\frac{5-\frac{2}{\infty}+\frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+\frac{3}{\infty}-1}=\frac{5-0+0}{0+0-1}=-5$$

чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$, необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на наибольшую степень переменной

Задание 4: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{1-x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)}{-(x-1)(x+1)}=$

$$=\left|\begin{array}{c} x^2-3x+2=0 \\ D=3^2-4\cdot 2=1 \\ x_1=\frac{3+1}{2}=2,\quad x_2=\frac{3-1}{2}=1 \end{array}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{-x-1}=\frac{1-2}{-1-1}=\frac{-1}{-2}=0{,}5$$

чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{0}{0}$, иногда достаточно числить и знаменатель дроби разложить на множители и затем сократить дробь на множитель, приводящий к неопределенности;

Задание 5: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-2}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4-x}-2)(\sqrt{4-x}+2)}{3x(\sqrt{4-x}+2)}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4-x-4}{3x(\sqrt{4-x}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{3x(\sqrt{4-x}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{3\cdot(\sqrt{4-x}+2)}=-\frac{1}{12}$$

;чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{0}{0}$, зависящую от иррациональности, достаточно перевести иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и сократить на множитель, приводящий к неопределенности;

Производная функции. Производная второго порядка Производная сложной функции.

Задание 6. Найти производную сложной функции $y = arctg\sqrt{x}$

$$y' = (arctg\sqrt{x})' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

Задание 7. Найти производную функции $y = \sqrt{arctgx}$

$$y' = (\sqrt{arctgx})' = \frac{1}{2\sqrt{arctgx}}\cdot(arctgx)' = \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{arctgx}}$$

Задание 8. Найти производную функции $y = \sqrt[3]{x^2+tgx+15}$

Здесь у нас корень, а для того, чтобы продифференцировать корень, его нужно представить в виде степени $x^{\frac{a}{b}}$. Таким образом, сначала приводим функцию в надлежащий для дифференцирования вид:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2+tgx+15})' = \left((x^2+tgx+15)^{\frac{1}{3}}\right)'$$

Анализируя функцию, приходим к выводу, что сумма трех слагаемых – это внутренняя функция, а возведение в степень – внешняя функция. Применяем правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2+tgx+15})' = \left((x^2+tgx+15)^{\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(x^2+tgx+15)^{-\frac{2}{3}}\cdot(x^2+tgx+15)'$$

Степень снова представляем в виде радикала (корня), а для производной внутренней функции применяем простое правило дифференцирования суммы:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2+tgx+15})' = \left((x^2+tgx+15)^{\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(x^2+tgx+15)^{-\frac{2}{3}}\cdot(x^2+tgx+15)' =$$

$$= \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2+tgx+15)^2}}\cdot((x^2)'+(tgx)'+(15)') =$$

$$= \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2+tgx+15)^2}}\cdot\left(2x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

Исследование функции и построение графика

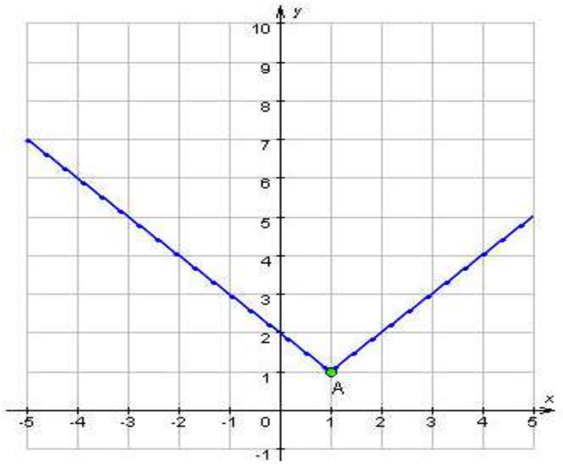
Задание 9.

Построить и прочитать график кусочно – линейной функции

$$y = \begin{cases} 2 - x \text{ при } x < 1 \\ x \text{ при } x \geq 1 \end{cases}.$$

Решение.

Рассмотрим функциюу $= \begin{cases} 2 - \text{x при x} < 1 \\ \text{x при x} \geq 1 \end{cases}$. На рисунке показан график этой функции. Чтобы его получить, построим график функции y = 2 – x при x< 1и y = x при x ≥ 1.



Прочитаем график построенной функции:

1. D(y)=R
2. E(y)=[1; + ∞)
3. Функция общего вида;
4. Непериодическая;
5. Точки пересечения с осями координат:

Ox: нет точек пересечения

Oy: (0; 2) – точка пересечения с осью ординат;

6. Функция положительна на всей области определения;
7. Функция возрастает на [1; + ∞) и убывает на (- ∞; 1]/

Задание 10.

Построить график дробно-линейной функции $y = \frac{x+8}{x-2}$.

Решение.

Представим дробь в виде $n + \frac{k}{x-m}$. Для этого x + 8 запишем в следующем виде: x – 2 + 10 (т.е. 8 представили в виде –2 + 10).

Получим:

$\frac{x+8}{x-2} = \frac{x-2+10}{x-2} = \frac{(x-2)+10}{x-2} = 1 + \frac{10}{x-2}$.

Итак, мы получили все необходимые значения: k = 10, m = 2, n = 1.

Таким образом, мы нашли асимптоты нашей гиперболы (исходя из того, что x = m, y = n): x = 2, y = 1.

То есть одна асимптота гиперболы проходит параллельно оси y на расстоянии 2 единиц справа от нее, а вторая асимптота проходит параллельно оси x на расстоянии 1 единицы выше ее.

Построим график данной функции. Для этого сделаем следующее:

1) проведем в координатной плоскости пунктиром асимптоты – прямую x = 2 и прямую y = 1.

2) так как гипербола состоит из двух ветвей, то для построения этих ветвей составим две таблицы: одну для x < 2, другую для x > 2.

Сначала подберем значения x для первого варианта (x <2).

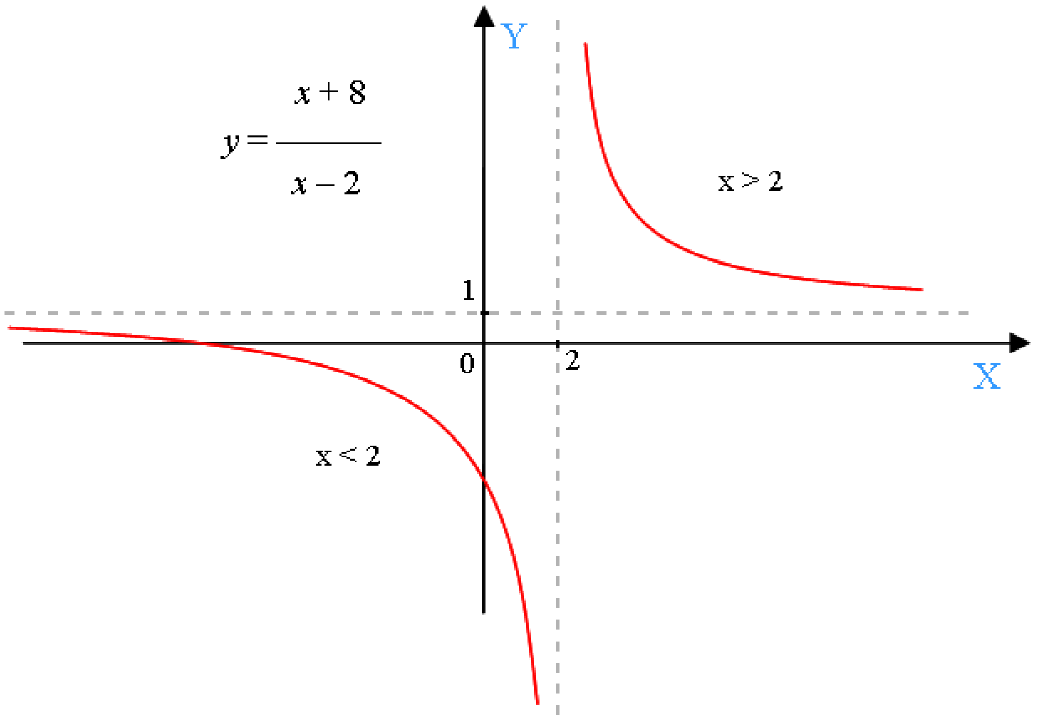
Результаты всех полученных вычислений вписываем в таблицу:

x	-3	-2	-1	0	1
y	-1	-1,5	-2,3	-4	-9

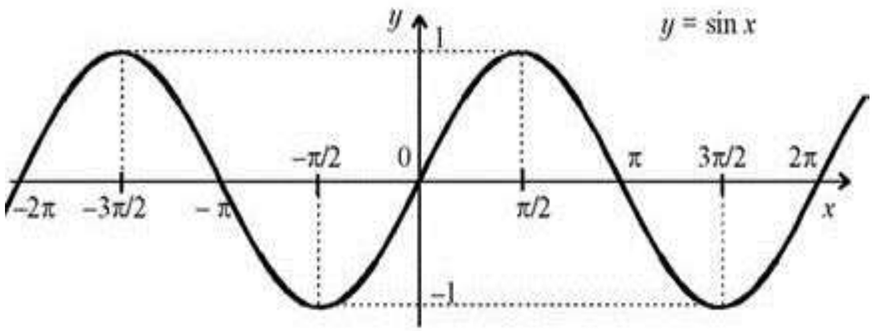
Теперь составим таблицу для варианта x > 2:

x	3	4	5	6	7
y	11	6	4,3	3,5	3

3)Далее просто составляете график функции с полученными координатами



Задание 11. Перечислить свойства функции y = sinx



Описание свойств функции y = sinx

1. Область определения	R
2. Область значений	[-1; 1]
3. Четность (нечетность)	нечетная
4. Наименьший положительный период	2π
5. Координаты точек пересечения графика f с осью Ox	(πn; 0)
6. Координаты точек пересечения графика f с осью Oy	(0;0)
7. Промежутки, на которых функция принимает положительные значения	(2πn; π+2πn)
8. Промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения	(- π+2πn; 2πn)
9. Промежутки возрастания	[- π/2 +2πn; π/2 +2πn]
10. Промежутки убывания	[π/2 +2πn; 3π/2 +2πn]
11. Точки минимума	- π/2 +2πn
12. Минимумы функции	-1
13. Точки максимума	π/2 +2πn
14. Максимумы функции	1

Задание 12.

Исследовать функцию $y = x^3 - 3x^2 + 2$ и построить ее график

1. Область определения функции – вся числовая прямая.

2. $y(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 2 = -x^3 - 3x^2 + 2$, значит, функция является ни четной, ни нечетной и график ее не симметричен.

3. $y'(x) = 3x^2 - 3\cdot 2x + 0 = 3x^2 - 6x$

Производная существует везде, значит станционарных точек нет.
Найдем критические точки:

$3x^2 - 6x = 0$

$3x(x - 2) = 0$

$3x = 0;\ x - 2 = 0$

$x = 0,\ x = 2$ – критические точки

4. $\quad + \quad \underset{0}{|} \quad - \quad \underset{2}{|} \quad + \quad \to$

Точка x = 0 - max, точка x = 2 - min.

$y(0) = 0^3 – 3\cdot0^2 + 2 = 2$, точка максимума(0;2)
$y(2) = 2^3 – 3\cdot2^2 + 2 = 8 – 12 + 2 = -2$, точка минимума (2;-2)

$\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$, значит, горизонтальных асимптот нет
вертикальных асимптот тоже нет.

С осью x, y = 0: $x^3 – 3x^2 + 2= 0$

$(x – 1)(x^2 -2x – 2) = 0$

$x – 1 = 0$; $x^2 -2x – 2 = 0$

$x = 1$ $\qquad D = 12;$ $\qquad x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{12}}{2} = \frac{2\pm2\sqrt{3}}{2} = 1\pm\sqrt{3}$,

значит, график функции пересекает ось x точках (1;0); (1 -$\sqrt{3}$; 0); (1 +$\sqrt{3}$; 0)
с осью y, x = 0: y = 2 значит, график функции пересекает ось y точке (0;2)

9.

x	-2	-1	1	3	4
y	-18	-2	0	2	18

Интегральное исчисление функции

Содержание

Неопределенный интеграл и его свойства. Основные способы интегрирования.

Определенный интеграл. Основные свойства определённого интеграла. Геометрический смысл определенного интеграла.

Первообразная функции. Неопределенный интеграл

Задание 13. Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

$$а)\ \int\cos 4x dx;\ б)\ \int e^{9x+1}dx;\ в)\int x(2-x^2)^5 dx$$

Решение:

$$а)\ \int\cos 4x dx = \left| \begin{matrix} t = 4x \\ dt = (4x)' = 4dx \\ dx = \dfrac{dt}{4} \end{matrix} \right| = \int\cos t\frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int\cos t dt = \left\{ \begin{matrix} \text{формула 7} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{matrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{4}\sin 4x + C.$$

$$б)\ \int e^{9x+1}dx = \left| \begin{matrix} t = 9x+1 \\ dt = (9x+1)' = 9dx \\ dx = \dfrac{dt}{9} \end{matrix} \right| = \int e^t\frac{dt}{9} = \frac{1}{9}\int e^t dt = \left\{ \begin{matrix} \text{формула 6} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{9}e^t + C = \frac{1}{9}e^{9x+1} + C.$$

в) $\int x(2-x^2)^5dx = \left| \begin{matrix} t=2-x^2 \\ dt=(2-x^2)'=-2xdx \\ xdx=\dfrac{dt}{-2} \end{matrix} \right| = \int t^5\left(-\dfrac{dt}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}\int t^5dt = \left\{ \begin{matrix} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{matrix} \right\} =$

$$= -\frac{1}{2}\frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{12}(2-x^2)^6 + C.$$

Задание 14 Проинтегрировать по частям

$а)\ \int(3x-1)\sin 2xdx; \quad б)\ \int(1+2x)\ln xdx.$

Решение.

$$а)\ \int(3x-1)\sin 2xdx = \left| \begin{matrix} U=3x-1 \to dU=3dx \\ dV=\sin 2xdx \to V=-\dfrac{\cos 2x}{2} \end{matrix} \right| = (3x-1)(-\frac{\cos 2x}{2}) + \int\frac{\cos 2x}{2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{2}\int\cos 2xdx = -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{4}\sin 2x + C.$$

$$б)\ \int(1+2x)\ln xdx = \left| \begin{matrix} U=\ln x \to dU=\dfrac{dx}{x} \\ dV=(1+2x)dx \to \\ V=\int(1+2x)dx = x+x^2 \end{matrix} \right| = \ln x(x+x^2) - \int(x+x^2)\frac{dx}{x} =$$

$$= \ln x(x+x^2) - \int(1+x)dx = \ln x(x+x^2) - x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Вычисление площади криволинейной трапеции с помощью определённого интеграла

Задание 15..Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 2x + 2$, x=-1, x=2 и осью OX.

Решение: данная фигура (рис. 2) представляет собой криволинейную трапецию, поэтому её площадь вычисляется по формуле (1).

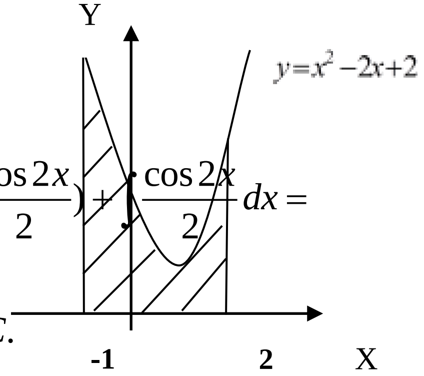


Рис. 2

$$S = \int_{-1}^{2}(x^2-2x+2)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} - x^2\Big|_{-1}^{2} + 2x\Big|$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) - \left(2^2 - (-1)^2\right) + \left(2\cdot 2 - 2\cdot(\right.$$

$$= 3 - 3 + 6 = 6.$$

Ответ: 6 кв.ед.

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}(x-3)\right)' = \left(\sqrt{x}\right)'(x-3) + \sqrt{x}(x-3)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3) + \sqrt{x}\cdot 1.$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3) + \sqrt{x} = \frac{x-3+2x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}.$$

Задание 16. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 - 5x + 6$ и осью OX.

Решение: данная фигура (рис. 4) расположена ниже оси OX, поэтому применим формулу (2).

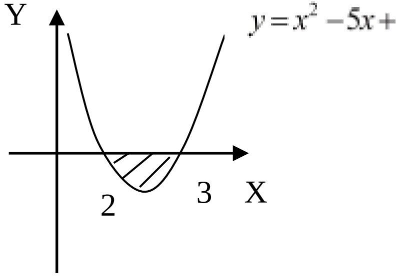


Рис. 4

$$S = \left|\int_2^3 (x^2 - 5x + 6)dx\right| = \left|\frac{x^3}{3}\Big|_2^3 - \frac{5x^2}{2}\Big|_2^3 + 6x\Big|_2^3\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{5\cdot 3^2}{2} - \frac{5\cdot 2^2}{2}\right) + (6\cdot 3 - 6\cdot 2)\right| =$$

$$= \left|\frac{19}{3} - \frac{25}{2} + 6\right| = \left|\frac{38 - 75 + 36}{6}\right| = \left|-\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}$$

Ответ: 1/6 кв.ед.

Задание 17.. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 + 1$ и $y = -x + 3$.

Решение: данная фигура (рис. 5)представляет собой разность криволинейных трапеций

Абсциссы точек пересечения находим по чертежу: x_1=-2 и x_2=1.

$S = \int_{-2}^{1}(-x+3)dx - \int_{-2}^{1}(x^2+1)dx$. Можно записать под один интеграл:

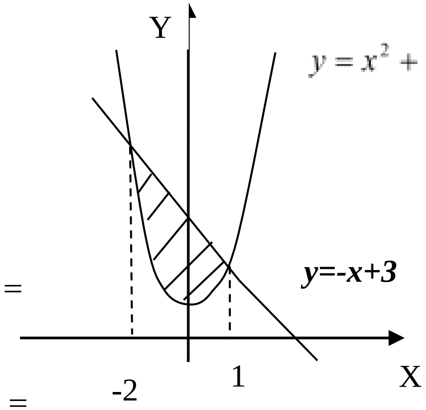


Рис. 5

$$S = \int_{-2}^{1}\left(-x + 3 - (x^2 + 1)\right)dx = \int_{-2}^{1}\left(2 - x - x^2\right)dx =$$

$$= 2x\Big|_{-2}^{1} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{1} = \left(2\cdot 1 - 2\cdot(-2)\right) - \left(\frac{1^2}{2} - \frac{(-2}{2}\right.$$

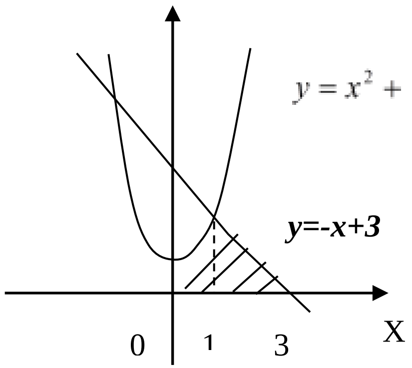
$$-\left(\frac{1^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}\right) = 6 - \left(-\frac{3}{2}\right) - 3 = 4\frac{1}{2}$$

Ответ: 4,5 кв.ед.

Задание 18.. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 + 1$ и $y = -x + 3$, и координатными осями.

Решение: данная фигура (рис. 6) представляет собой сумму криволинейных трапеций S=S_1+S_2, где $S_1 = \int_0^1 (x^2 + 1)dx$ и

$S_2 = \int_1^3 (-x + 3)dx$. Получим формулу:



$$S=\int_0^1\left(x^2+1\right)dx+\int_1^3\left(-x+3\right)dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1+\left.x\right|_0^1-\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^3+\left.3x\right|_1^3=$$

$$=\left(\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)+\left(1-0\right)-\left(\frac{3^2}{2}-\frac{1^3}{2}\right)+\left(3\cdot3-3\cdot1\right)=$$

$$=\frac{1}{3}+1-4+6=3\frac{1}{3}$$

Ответ: $3\frac{1}{3}$ кв.ед.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Понятие дифференциального уравнения. Общие и частные решения дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными.

Задание 19. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'=-2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=2$

По условию требуется найти **частное решение** ДУ, удовлетворяющее начальному условию. Такая постановка вопроса также называется *задачей Коши*.

Сначала находим общее решение.

$$\frac{dy}{dx}=-2y$$

$$\frac{dy}{y}=-2dx$$

Интегрируем уравнение:

$$\int\frac{dy}{y}=-2\int dx$$

$$\ln|y|=-2x+C^*$$

$$y=e^{-2x+C^*}$$

$$y=e^{C^*}\cdot e^{-2x}$$

Итак, общее решение: $y=Ce^{-2x}$, где $C=const$. На завершающем этапе нужно найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(0)=2$.

Необходимо подобрать **такое** значение константы C, чтобы выполнялось заданное начальное условие $y(0)=2$.

В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» двойку:

$$y(0)=Ce^{-2\cdot0}=Ce^0=C=2$$

В общее решение $y = Ce^{-2x}$ подставляем найденное значение константы $C = 2$:

$y = 2e^{-2x}$ – это и есть нужное нам частное решение.

Задание 20. Решить дифференциальное уравнение $y' + (2y+1)ctgx = 0$

Решение: Переписываем производную в нужном нам виде:

$$\frac{dy}{dx} + (2y+1)ctgx = 0$$

Переносим второе слагаемое в правую часть со сменой знака:

$$\frac{dy}{dx} = -(2y+1)ctgx$$

$$\frac{dy}{2y+1} = -ctgxdx$$

Переменные разделены, интегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{2y+1} = -\int ctgxdx$$

$$\int \frac{dy}{2y+1} = -\int \frac{\cos xdx}{\sin x}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(2y+1)}{2y+1} = -\int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$$

$$\frac{1}{2}\ln|2y+1| = -\ln|\sin x| + \ln|C|$$

Решение распишу очень подробно:

$$\ln|2y+1|^{\frac{1}{2}} = \ln|\sin x|^{-1} + \ln|C|$$

$$\ln\sqrt{2y+1} = \ln\frac{1}{|\sin x|} + \ln|C|$$

$$\ln\sqrt{2y+1} = \ln\left|\frac{C}{\sin x}\right|$$

$$\sqrt{2y+1} = \frac{C}{\sin x}$$

Ответ: общий интеграл: $\sqrt{2y+1}\cdot\sin x = C$, где $C = const$

Примечание: общий интеграл любого уравнения можно записать не единственным способом. Таким образом, если у вас не совпал результат с заранее известным ответом, то это еще не значит, что вы неправильно решили уравнение.

Задание 21. Найти частное решение дифференциального уравнения $e^{y-x^2}dy - 2xdx = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \ln 2$. Выполнить проверку.

Решение: Сначала найдем общее решение. Данное уравнение уже содержит готовые дифференциалы dy и dx, а значит, решение упрощается. Разделяем переменные:

$$e^y\cdot e^{-x^2}dy - 2xdx = 0$$

$$e^y\cdot e^{-x^2}dy = 2xdx$$

$$e^y dy = \frac{2xdx}{e^{-x^2}}$$

$$e^y dy = 2xe^{x^2}dx$$

Интегрируем уравнение:

$$\int e^y dy = 2\int xe^{x^2}dx$$

$$\int e^y dy = \int e^{x^2} d(x^2)$$

$$e^y = e^{x^2} + C$$

$$\ln e^y = \ln(e^{x^2} + C)$$

$$y = \ln(e^{x^2} + C)$$

общее решение:

$y = \ln(e^{x^2} + C)$, где $C = const$

Найдем частное решение, соответствующее заданному начальному условию $y(0) = \ln 2$

$$\ln 2 = \ln(e^0 + C)$$

$$\ln 2 = \ln(1 + C) \Rightarrow C = 1$$

$$y(0) = \ln(e^0 + C) = \ln(1 + C) = \ln 2 \Rightarrow C = 1$$

Подставляем найденное значение константы $C = 1$ в общее решение.

Ответ: частное решение: $y = \ln(e^{x^2} + 1)$

Решение линейных дифференциальных уравнений второго порядка

Задание 22. Найти общее решение дифференциального уравнения: а) $4y'' - 4y' + y = 0$; б) $y'' - 3y' = 0$; в) $y'' - 2y' + 10y = 0$.

Решение.

Для каждого из данных уравнений составляем характеристическое уравнение и решаем его. По виду полученных корней записываем общее решение дифференциального уравнения (см. табл.):

а) $4k^2 - 4k + 1 = 0$, корни $k_1 = k_2 = \dfrac{1}{2}$ – действительные и равные, поэтому общее решение уравнения $y = e^{x/2}(C_1 + C_2 x)$;

б) $k^2 - 3k = 0$, $k(k-3) = 0$, корни $k_1 = 0$, $k_2 = 3$ – действительные и различные, поэтому общее решение уравнения $y = C_1 e^{0\cdot x} + C_2 e^{3x} = C_1 + C_2 e^{3x}$;

в) $k^2 - 2k + 10 = 0$, корни $k_{1,2} = 1 \pm 3i$ – комплексно-сопряженные, поэтому общее решение уравнения $y = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Задание 23. Определить и записать структуру частного решения $y_{ч.н.}$ уравнения $y'' + 36y = f(x)$ по виду функции $f(x)$, если а) $f(x) = 4xe^{-x}$; б) $f(x) = 2\sin 6x$.

Решение.

Находим корни характеристического уравнения: $k^2 + 36 = 0$, $k_{1,2} = \pm 6i$.

а) Так как $f(x) = 4xe^{-x} = P_1(x)e^{mx}$, где $P_1(x) = 4x$, $m = -1$ (случай 2 в табл. 2.2), то частное решение имеет вид $y_{ч.н.} = x^0 Q_1(x)e^{-x} = (Ax + B)e^{-x}$.

$r = 0$, т. к. среди корней характеристического уравнения нет равных -1.

б) Поскольку $f(x) = 2\sin 6x = 0\cdot\cos 6x + 2\sin 6x$ (случай 3 в табл. 2.2): $M = 0$, $N = 2$, $b = 6$), то $y_{ч.н.} = x(A\cos 6x + B\sin 6x)$, множитель x появился потому, что $6i$ является корнем характеристического уравнения.

Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

1.Если дифференциальное уравнение имеет вид $y'' = f(x)$, то оно решается последовательным интегрированием.

2.Если в запись уравнения не входит функция y(x), т.е. оно имеет вид $G(x, y', y'') = 0,$ то такое уравнение можно решить, найдя вспомогательную функцию $z = y', \quad z' = y''$.

Задание 24. Решить уравнение $xy'' + y' = 0$.

Решение: Положим $z = y', \quad z' = y''$.

Исходное уравнение примет вид $xz' + z = 0$.

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$z = C_1 / x$$

Возвращаясь к первоначальной функции, получаем уравнение

$$y' = C_1 / x$$

$$dy = C_1 dx / x$$

$$y = C_1 \ln|x| + C_2$$

3.Если в запись уравнения не входит переменная x, т.е. оно имеет вид $G(y, y', y'') = 0,$ то такое уравнение можно решить, найдя вспомогательную функцию $z = z(y) = y', \quad z'z = y''$.

Задание 25 Решить уравнение $2yy'' = (y')^2 + 1$.

Решение: Положим $z = z(y) = y', \quad z'z = y''$. Исходное уравнение примет вид $2yzz' = z^2 + 1$.

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$$\frac{2zdz}{z^2 + 1} = \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{d(z^2 + 1)}{z^2 + 1} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln(z^2 + 1) = \ln|y| + C, \quad C = \ln C_1,$$

$$\ln(z^2 + 1) = \ln|y| + \ln C_1,$$

$$\ln(z^2 + 1) = \ln|yC_1|,$$

$$(z^2 + 1) = |yC_1|,$$

$$z^2 = C_1 y - 1,$$

$$z = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$$

Возвращаясь к первоначальной функции, получаем уравнение

$$y' = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$$

$$\pm \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = dx \qquad \pm \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \int dx$$

$$\pm\sqrt{C_1 y - 1} = \frac{C_1}{2}(x + C_2) \qquad C_1 y - 1 = \frac{C_1{}^2}{4}(x + C_2)^2$$

Раздел 2. Основы дискретной математики

Содержание учебного материала

Основные понятия.. Операции над множествами. Свойства операций над множествами. Отношения. Свойства бинарных Типы отношений.

Графы. Основные определения. Маршруты цепи, циклы. Деревья. Графы и бинарные отношения. Операции над графами.

Задание 26. Укажите, какое из утверждений правильное:

а) - 0,7 ϵ Q; б) $\sqrt{17} \in R$; в) 4 ϵ N.

Задание 27. Выпишите все элементы каждого множества: А – множество дней недели; В – множество цветов светофора; С – множество цифр.

Задание 28. Выпишите все элементы множества F, если F – это множество корней уравнения $x^2 + 4x – 5 = 0$.

Задание 29. Найдите пересечение и объединение множеств А и В, если:

А={1**;** 3**;** 5**;** 7**;** 9} **В={**2**;** 4**;** 6**;** 8}.

Задание 30. Множество А состоит из всех чисел открытого интервала**(**1**;**3**)**, множество В состоит из всех чисел интервала**[**2**;**6**]**. Найти объединение множеств А и В.

Решение типового задания 1:

Для выполнения первого задания необходимо вспомнить определения натуральных, целых, рациональных и действительных чисел:

Целые числа (Z) – это натуральные числа, противоположные им и число ноль.

Рациональные числа (Q) – это конечные дроби и бесконечные периодические дроби. Например, $\frac{2}{5} = 0{,}4$; $\frac{1}{6} = 0{,}1(6)$

Все целые числа являются рациональными.

Действительные числа (R) - множество всех рациональных и всех иррациональных чисел.

Значит, а) верно; б) верно; в) верно.

Решение типового задания 27:

Перечислим дни недели: понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье. Значит А = {понедельник; вторник; среда; четверг; пятница; суббота; воскресенье}.

Аналогично составим множества В и С:

В = {красный; желтый; зеленый}, С = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}

Решение типового задания 28:

Множество F задается следующим образом: F={x: $x^2 + 4x - 5=0$}.

Чтобы записать элементы этого множества, необходимо решить уравнение $x^2 + 4x – 5 = 0$, т. е. найти его корни:

$x^2 + 4x – 5 = 0$

D = 16 - 4·(-5) = 16 + 20 = 36 = 6^2; $x_1 = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1$;

$x_2 = \frac{-4-6}{2} = \frac{-10}{2} = -5$.

Значит, F={-5; 1}.

Решение типового задания 29:

Множество A состоит из нечетных чисел первого десятка. Множество B состоит из четных чисел первого десятка. Объединением будут все числа первого десятка:

AUB = {1**;** 2**;** 3**;** 4**;** 5**;** 6**;** 7**;** 8**;** 9**}.**

Пересечением множеств A и B является пустое множество, т. к. общих элементов у этих множеств нет, значит A∩B={Ø}.

Решение типового задания 30:

Объединением AUB будут все числа принадлежащие сразу двум интервалам.

На интервале от двух до трех, множества содержат одинаковые числа. Тогда объединение можно записать в виде: **A**UB = **(**1;6**]**

Раздел 3. Элементы теории вероятностей и математической статистики

Содержание
Случайные события .Операции над событиями. Определение вероятности события. Случайная величина. Числовые характеристики случайных величин. Задачи математической статистики. Генеральная совокупность и выборка

Задание 31. В ящике 7 белых и 9 черных шаров. Наугад вынимают 1 шар. Найти вероятность того, что будет вынут шар черного цвета.

Решение:

Пусть *A* – событие, состоящее в том, что вынутый черный шар. n = 7+9=15 – число всех равновозможных исходов опыта. m = 9 – число исходов благоприятствующих событию A. Воспользуемся формулой классической вероятности: $p(A)=\frac{m}{n}$.

$p(A)=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}=0{,}6$.

Задание 32. В колоде 36 карт. Найти вероятность того, что вытащенная наугад карта из колоды оказалась королям.

Решение:

Пусть *A* – событие, состоящее в том, что из колоды вынули короля. Воспользуемся формулой классической вероятности: $p(A)=\frac{m}{n}$. В колоде 36 карт, значит n = 36 – число всех равновозможных исходов опыта. Поскольку в колоде всего четыре короля, то m = 4 – число исходов благоприятствующих появлению события A. $p(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

Задание 33. На карточке спортлото 36 клеток. Играющий должен отметить 4. Каково число всех возможных вариантов?

Решение:

Из условия задачи следует, что необходимо найти число сочетаний 4 из 36. Воспользуемся формулой: $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$.

$C_{36}^4=\frac{36!}{4!(36-4)!}=\frac{36!}{4!32!}=\frac{33\cdot34\cdot35\cdot36}{24}=58905$.

Задание 34. В ящике 15 деталей, среди которых 10 нестандартных. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей две будут нестандартные.

Решение:

Пусть событие A – среди извлеченных 4 деталей 2 нестандартные.

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

$n = C_{15}^{4}$ –общее число четверок, которые можно сформировать из 15 деталей.

$m = C_{10}^{2} \cdot C_{5}^{2}$ –число четверок, благоприятствующих событию *A*.

По формуле $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^{2} \cdot C_{5}^{2}}{C_{15}^{4}} = \frac{10!\,5! \cdot 11!\,4!}{8!\,2!\,3!\,2! \cdot 15!} = \frac{30}{91} \approx 0{,}33$.

Задание 35. Студент сдает экзамен по теории вероятностей. Вероятность получить на экзамене «2» равна 0,1; «3» – 0,6; «4» – 0,2; «5» – 0,1. Какова вероятность того, что студент получит на экзамене положительную оценку?

Решение:

Пусть событие *A* – студент получит на экзамене положительную оценку. $p(A) = 1 - p(2)$, т.к. событие *A* и событие «2» – получить двойку на экзамене являются противоположными.

$p(A) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

Задание 36. В юридической фирме 21 % работников получают высокую заработную плату. Известно также, что 40 % работников фирмы – женщины, а 6,4 % работников – женщины, которые получают высокую заработную плату. Можем ли мы утверждать, что в фирме женщины в среднем получают более низкую заработную плату, чем мужчины?

Решение:

Нам необходимо найти вероятность того, что случайно выбранный работник будет женщина, имеющая высокую заработную плату. Пусть событие *A* – случайно выбранный работник имеет высокую заработную плату, событие *B* – случайно выбранный работник – женщина.

Данная задача решается с использованием теоремы о вероятности совместного появления двух зависимых событий: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$. Отсюда $p_A(B) = \frac{p(AB)}{p(A)} = \frac{0{,}064}{0{,}4} = 0{,}16$. Поскольку 0,16 меньше, чем 0,21, то мы можем сделать вывод о том, что женщины имеют более низкую заработную плату по сравнению с мужчинами.

Задание 37. Вероятность того, что первый стрелок поразит мишень равна 0,8, второй – 0,5. Найти вероятность того, мишень будет поражена только один раз.

Решение:

Пусть событие A – попадет первый стрелок. $p(A)=0{,}8$. Событие B – мишень поразит второй стрелок. $p(B)=0{,}5$. Интересующее нас событие D – будет ровно одно попадание по мишени, если стрелки сделают только по одному выстрелу. Вероятность того, что первый стрелок не попадет: $p(\overline{A})=1-p(A)=1-0{,}8=0{,}2$. Второй стрелок не попадет с вероятностью $p(\overline{B})=1-p(B)=1-0{,}5=0{,}5$. Вероятность события D равна:

$$p(D)=p(A)\cdot p(\overline{B})+p(\overline{A})\cdot p(B)=0{,}8\cdot 0{,}5+0{,}2\cdot 0{,}5=0{,}5.$$

Задание 38. Две пушки стреляют по мишени. Вероятность поражения мишени первой пушкой равна $p(A)$ = 0,75, второй $p(B)$ = 0,6. Какова вероятность того, что мишень будет поражена, если пушки сделают по одному залпу? События A и B независимы.

Решение:

Интересующие нас событие C – будет поражена мишень. Мишень будет поражена либо когда будет одно попадание, либо два. Таким образом, необходимо найти вероятность хотя бы одного попадания по мишени. Воспользуемся теоремой сложения совместных событий:

$$p(C)=p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB)$$

Поскольку события A и B независимы, данную формулу перепишем в следующем виде:

$$p(C)=p(A)+p(B)-p(A)p(B). \quad p(C)=0{,}75+0{,}6-0{,}75\cdot 0{,}6=0{,}9.$$