Чудаева Т. В.
Задачи и их решения. [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие /Т В. Чудаева. – Барнаул : КГБПОУ «АПТ», 2019.-43 с.

Пособие разработано в соответствии с программой курса «Математика».

Оно предназначено для организации самостоятельной работы студентов 2-го курса.

В пособии содержатся задачи различного уровня сложности по основным разделам. Для каждой задачи в чёткой и доступной форме с использованием современных математических символов изложены методики, позволяющие понять и усвоить приемы решения задач различных типов.

Раздел 1. Функции и графики

Содержание :
Область определения и множество значений; график функции, построение графиков функций, заданных различными способами. Монотонность, четность, нечетность, ограниченность, периодичность. Промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения,
точки экстремума. Графическая интерпретация. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях. Арифметические операции над функциями.
Сложная функция (композиция). Понятие о непрерывности функции.
Область определения и область значений обратной функции. График обратной функции.

Задание 1

Для функции, график которой изображен на рисунке, найдите:

а) область определения функции;

б) множество значений функции;

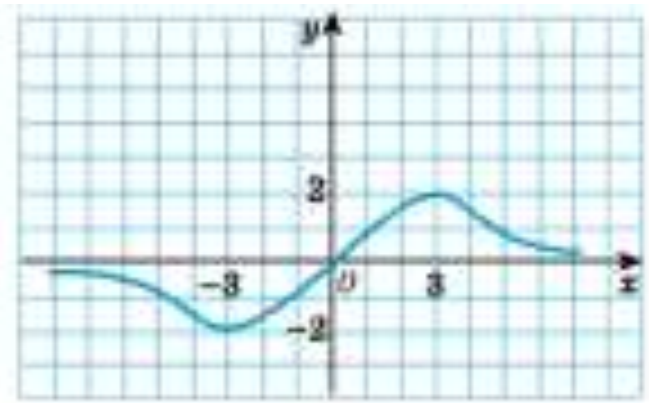
в) промежутки знакопостоянства функции;

г) точки пересечения графика функции с осями координат;

д) промежутки возрастания и убывания функции;

е) точки максимума и минимума функции;

ж) экстремумы функции.



Решение.

а) область определения функции – [-∞; +∞]

б) множество значений функции – [-2; 2]

в) промежутки знакопостоянства функции - [-∞; 0] ∪ [0; +∞]

г) точки пересечения графика функции с осями координат:

с осью OX – (0; 0)

с осью OY – (0; 0)

д) промежутки возрастания функции – [-3; 3]

промежутки убывания функции - [-∞; -3] ∪ [3; +∞]

е) точки максимума и минимума функции – xmax = 3 и xmin = -3

ж) экстремумы функции – ymax = 2 и ymin = -2.

Задание 2.

Дана функция $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$. Найти $f(0)$.

Решение.

Чтобы вычислить значение $f(0)$, надо в данную функцию вместо аргумента xподставить его значение $x = 0$. Имеем $f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 0 - 1 = -1$.

Задание 3.

Найдите область определения функций: а) $y = \frac{7}{x-5}$; б) $y = \sqrt{2x+1}$.

Решение.

а) Дробь $\frac{7}{x-5}$ имеет смысл при тех значениях x, при которых знаменатель $(x - 5)$ не равен нулю. Решив уравнение $x - 5 = 0$, найдем его корень $x = 5$. Таким образом, областью определения данной функции являются все действительные числа, кроме числа 5.

Ответ: (-∞; 5) ∪ (5; +∞).

б) Квадратные корни определены для неотрицательных чисел. Поэтому данная функция определена для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $2x + 1 \geq 0$. Решив неравенство $2x + 1 \geq 0$, получим $x \geq -3{,}5$.

Задание 4.

Построить и прочитать график линейной функции $y = \frac{1}{3}x + 2$.

Решение.

Чтобы построить график линейной функции**,** нам нужны координаты двух точек, принадлежащих графику функции. Чтобы их найти, нужно взять два значения x, подставить их в уравнение функции, и по ним вычислить соответствующие значения y.

Например, чтобы построить график функции $y = \frac{1}{3}x + 2$, удобно взять x = 0 и x = 3, тогда ординаты эти точек будут равны y = 2 и y = 3.

Получим точки A(0;2) и B(3;3). Соединим их и получим график функции $y = \frac{1}{3}x + 2$:

Прочитаем график, построенной функции:

1) D(y) = R;

2) E(y) = R;

3) Функция общего вида;

4) Непериодическая;

5) Точки пересечения с осями координат:

Ox: $\frac{1}{3}x + 2 = 0$, x = - 6, следовательно (- 6; 0) – точка пересечения с осью абсцисс.

Oy: при x = 0 y = 2, следовательно (0; 2) – точка пересечения с осью ординат;

6) $y = \frac{1}{3}x + 2$ положительна при x ∈(- 6; +∞) и отрицательна при x ∈ (- ∞; - 6)

7) $y = \frac{1}{3}x + 2$ возрастает на всей области определения.

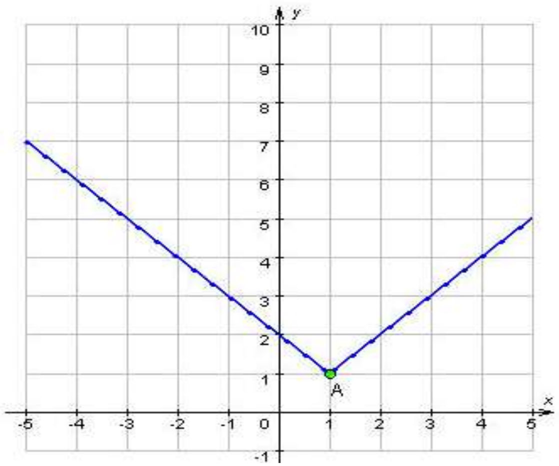
Задание 5.

Построить и прочитать график кусочно – линейной функции

$$y = \begin{cases} 2 - x \text{ при } x < 1 \\ x \text{ при } x \ge 1 \end{cases}.$$

Решение.

Рассмотрим функциюю $y = \begin{cases} 2 - x \text{ при } x < 1 \\ x \text{ при } x \ge 1 \end{cases}$. На рисунке показан график этой функции. Чтобы его получить, построим график функции $y = 2 - x$ при $x < 1$и $y = x$ при $x \ge 1$.



Прочитаем график построенной функции:

1. D(y)=R
2. E(y)=[1; + ∞)
3. Функция общего вида;
4. Непериодическая;
5. Точки пересечения с осями координат:

Ox: нет точек пересечения

Oy: (0; 2) – точка пересечения с осью ординат;

6. Функция положительна на всей области определения;
7. Функция возрастает на [1; + ∞) и убывает на (- ∞; 1]/

Задание 6.

Построить график дробно-линейной функции $y = \frac{x+8}{x-2}$.

Решение.

Представим дробь в виде $n + \frac{k}{x-m}$. Для этого x + 8 запишем в следующем виде: x – 2 + 10 (т.е. 8 представили в виде –2 + 10).

Получим:

$$\frac{x+8}{x-2} = \frac{x-2+10}{x-2} = \frac{(x-2)+10}{x-2} = 1 + \frac{10}{x-2}.$$

Итак, мы получили все необходимые значения: k = 10, m = 2, n = 1.

Таким образом, мы нашли асимптоты нашей гиперболы (исходя из того, что x = m, y = n): x = 2, y = 1.

То есть одна асимптота гиперболы проходит параллельно оси y на расстоянии 2 единиц справа от нее, а вторая асимптота проходит параллельно оси x на расстоянии 1 единицы выше ее.

Построим график данной функции. Для этого сделаем следующее:

1) проведем в координатной плоскости пунктиром асимптоты – прямую x = 2 и прямую y = 1.

2) так как гипербола состоит из двух ветвей, то для построения этих ветвей составим две таблицы: одну для x < 2, другую для x > 2.

Сначала подберем значения x для первого варианта (x <2).

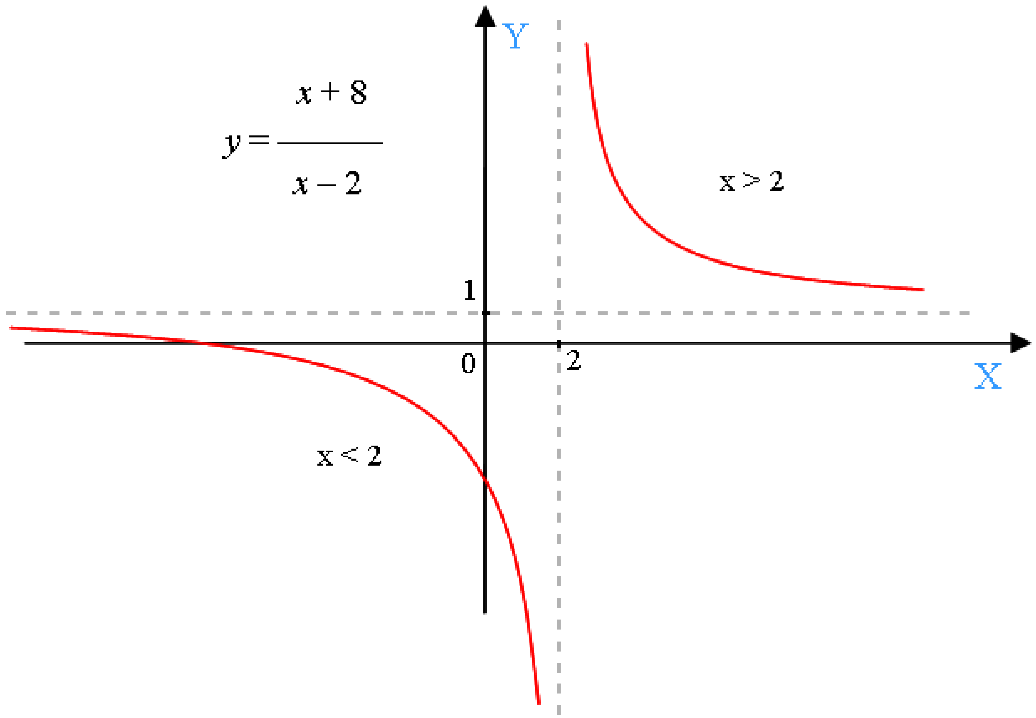
Результаты всех полученных вычислений вписываем в таблицу:

x	-3	-2	-1	0	1
y	-1	-1,5	-2,3	-4	-9

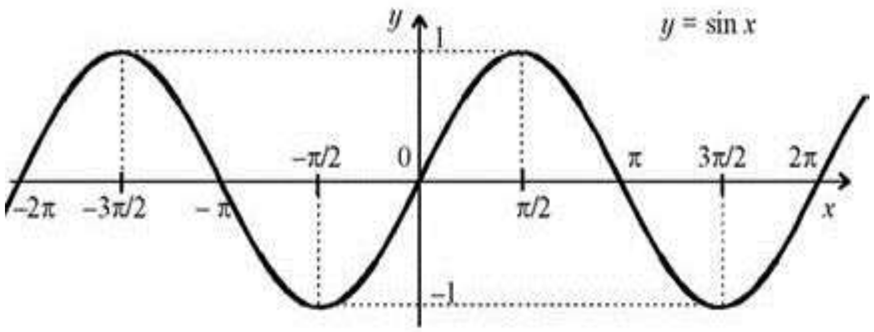
Теперь составим таблицу для варианта x > 2:

x	3	4	5	6	7
y	11	6	4,3	3,5	3

3)Далее просто составляете график функции с полученными координатами



Задание 7. Перечислить свойства функции y = sinx



Описание свойств функции y = sinx

1.	Область определения	R
2.	Область значений	[-1; 1]
3.	Четность (нечетность)	нечетная
4.	Наименьший положительный период	2π
5.	Координаты точек пересечения графика f с осью Ox	(πn; 0)
6.	Координаты точек пересечения графика f с осью Oy	(0;0)
7.	Промежутки, на которых функция принимает положительные значения	(2πn; π+2πn)
8.	Промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения	(- π+2πn; 2πn)
9.	Промежутки возрастания	[- π/2 +2πn; π/2 +2πn]
10.	Промежутки убывания	[π/2 +2πn; 3π/2 +2πn]
11.	Точки минимума	- π/2 +2πn
12.	Минимумы функции	-1
13.	Точки максимума	π/2 +2πn
14.	Максимумы функции	1

Задание 8. Решить задачу

В ходе распада радиоактивного изотопа, его масса уменьшается по закону $\mathrm{m(t)} = \mathrm{m_0} \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где $\mathrm{m_0}$ — начальная масса изотопа, t (мин) — прошедшее от начального момента время, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили вещество, содержащее в начальный момент времени $\mathrm{m_0} = 40$ мг изотопа Z, период полураспада которого T = 10 мин. В течение скольких минут масса изотопа будет не меньше 5 мг?

Решение. Подставим соответственные значения переменных в формулу:

$$5 = 40 \cdot 2^{-\frac{t}{10}}$$

$$\frac{5}{40} = 2^{-\frac{t}{10}}$$

$$\frac{1}{8} = 2^{-\frac{t}{10}}$$

$$2^{-3} = 2^{-\frac{t}{10}}$$

$$-3 = -\frac{t}{10}$$

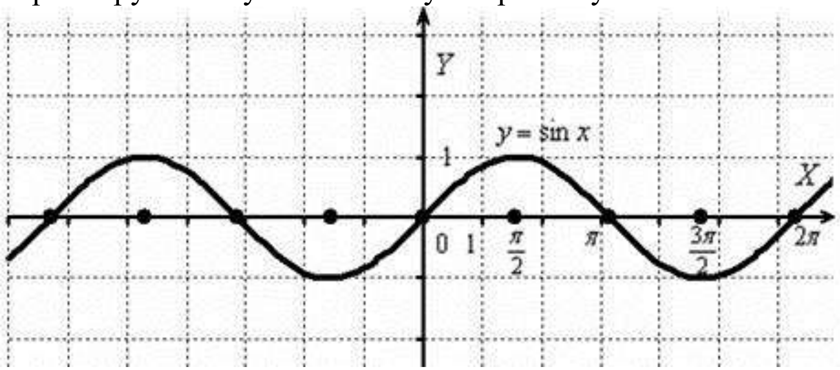
t = 30.

Ответ: 30 минут.

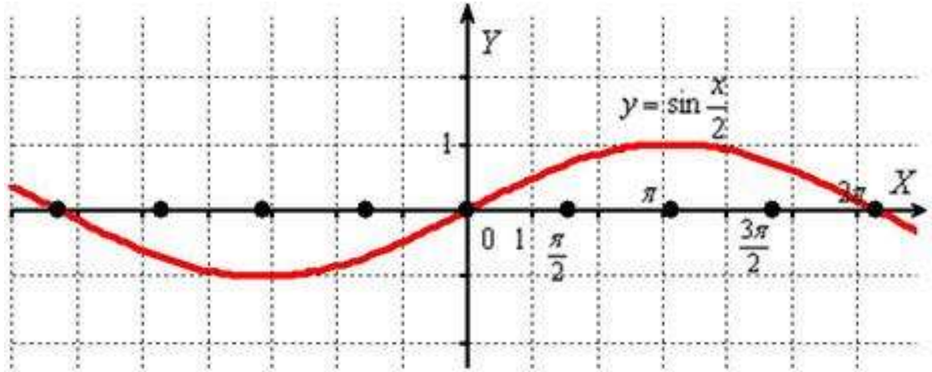
Задание 9.

Построить график функции $y = \sin\frac{x}{2}$

Берём в руки нашу «бесконечную гармошку»



И растягиваем её от оси ОУ в 2 раза:



То есть, график функции $y = \sin\frac{x}{2}$ получается путём растяжения графика y=sin хот оси ординат в два раза

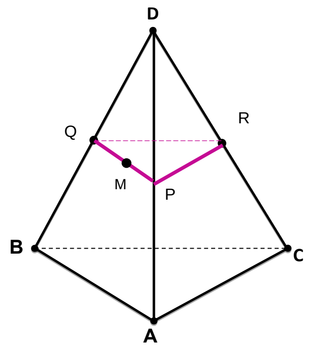
Раздел 2. Многогранники и круглые тела

Содержание:

Объем и его измерение. Формулы объема куба, прямоугольного параллелепипеда, призмы, цилиндра. Формулы объема пирамиды и конуса. Формулы площади поверхностей цилиндра и конуса. Формулы объема шара и площади сферы. Подобие тел. Отношения площадей поверхностей и объемов подобных тел

Задание 10 Точка М лежит на боковой грани ADB. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку М и параллельно основанию АВС.

Решение



α - секущая плоскость.

$$т.к.\quad \alpha \,||\, (ABC) \Rightarrow \alpha \,||\, AB,\ \alpha \,||\, BC,\ \alpha \,||\, CA$$

$$\alpha \cap (ABD) = QP,\ QP \,||\, AB$$

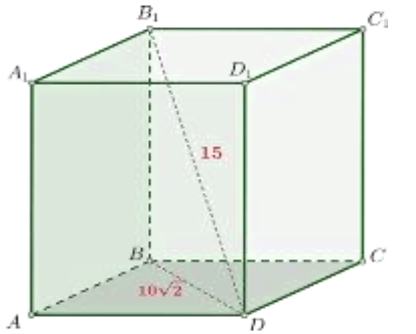
$$\alpha \cap (BDC) = QR,\ QR \,||\, BC$$

$$\alpha \cap (ADC) = PR,\ \ PR \,||\, AC$$

Отсюда вытекает следующий *способ построения искомого сечения*.
Проведём через точку M прямую, параллельную отрезку AB, и обозначим буквами P и Q точки пересечения этой прямой с боковыми рёбрамиDAиDB. Затем через точку P проведём прямую, параллельную отрезку AC, и обозначим буквой Rточку пересечения этой прямой с ребром DC. Треугольник PQR – искомое сечение

Задание 11.

Дана правильная четырехугольная призма, диагональ которой равна 15, а диагональ основания равна $10\sqrt{2}$. Найдите площадь полной поверхности призмы.



Решение: Пусть ABCDA1B1C1D1 – данная призма. Так как она правильная, то в основании лежит квадрат и она является прямой. Тогда △BB1D прямоугольный, следовательно, по теореме Пифагора BB1=$\sqrt{15^2-(10\sqrt{2})^2}$ = Место для формулы.5

Так как диагональ квадрата в $\sqrt{2}$ раз больше его стороны, то AB=$\frac{ВД}{\sqrt{2}}$=10. Следовательно,

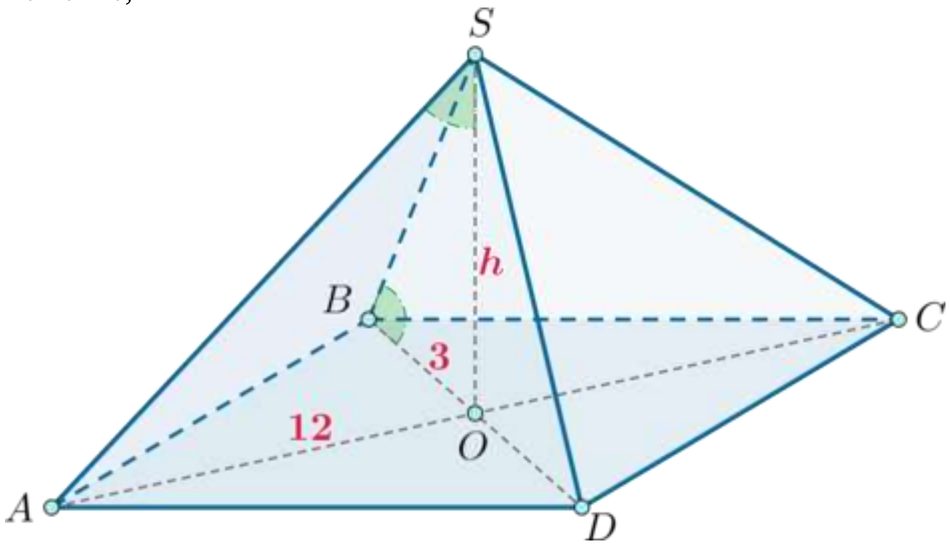
$S_{полн.п}= 2S_{АВСД} + 4\ S_{АА1Д1Д} = 2\cdot 10^2 + 4\cdot 10\cdot 5 = 400$

Ответ:400

Задание 12.

Дана пирамида SABCD, вершиной которой является точка S, в основании лежит ромб, а высота SO пирамиды падает в точку пересечения диагоналей ромба. Найдите объем пирамиды, если известно, что угол ASO равен углу SBO, а диагонали основания равны 6 и 24.

Решение;



Так как диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам, то AO=12, BO=3. Заметим, что так как SO – высота пирамиды, то ΔASO и ΔBSO – прямоугольные. Так как у них есть равные острые углы, то они подобны. Пусть SO=h, тогда из подобия имеем: $\frac{BO}{h}=\frac{h}{AO}\Rightarrow$h=6. Так как площадь ромба равна полупроизведению диагоналей, то объем пирамиды равен $V=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot \frac{1}{2}\cdot 24\cdot 6=144$.

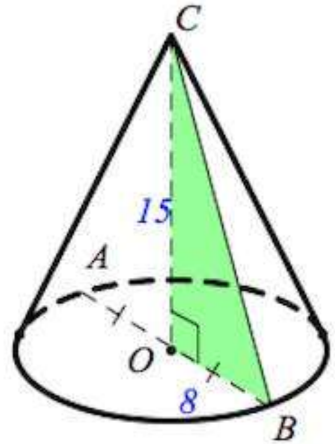
Ответ: 144

Задание 13.

Высота конуса равна 15, а диаметр основания – 16. Найдите образующую конуса.

Решение: Найдём образующую конуса BC по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника BCO.

$$BO=R=\frac{AB}{2}=8$$
$$BC=\sqrt{15^2+8^2}=17$$



Раздел 3. Начала математического анализа

Содержание

Способы задания и свойства числовых последовательностей. Понятие о пределе последовательности. Существование предела монотонной ограниченной последовательности. Суммирование последовательностей. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма.

. Понятие о производной функции, ее геометрический и физический смысл. Уравнение касательной к графику функции. Производные суммы, разности, произведения, частные. Производные основных элементарных функций. Применение производной к исследованию функций и построению графиков. Производные обратной функции и композиции функции.

Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах. Вторая производная, ее геометрический и физический смысл. Нахождение скорости для процесса, заданного формулой и графиком.

Последовательность

Задание 14

Вычислить первые три значения для функции $y = n^2$.

Решение:

подставляя в $y=n^2$ значения $n=1$, $n=2$, $n=3$ получим первые три значения функции:

$y_1=1^2=1;$
$y_2=2^2=4;$
$y_3=3^2=9.$

Задание 15.

Вычислить следующие четыре члена последовательности $y_1=1$; $y_2=1$; $y_n=y_n-2+y_n-1$.

Решение:

из формулы $y_n=y_n-2+y_n-1$ видно, что каждый следующий член последовательности равен сумме двух предыдущих, поэтому:

$y_1=1$; $y_2=1$; $y_3=1+1=2$; $y_4=1+2=3$; $y_5=2+3=5$; $y_6=3+5=8$.

Предел функции.

Задание 16. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2}{x^3-1}=\dfrac{2\cdot 2^2}{2^3-1}=\dfrac{8}{7}$

Применяя теорему о действиях над пределами функций вместо **x** подставляем 2,получим ответ равный 8/7

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5}{x-1}=\dfrac{5}{1-1}=\left(\dfrac{5}{0}\right)=\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x+4}{1+3x^2-x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+4}{\frac{1}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}-\frac{x^3}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x}-1}=\frac{5-\frac{2}{\infty}+\frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+\frac{3}{\infty}-1}=\frac{5-0+0}{0+0-1}=-5$$

чтобы раскрыть неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$, необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на наибольшую степень переменной

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{1-x^2}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-2)(x-1)}{-(x-1)(x+1)}=$

$$= \left| \begin{array}{c} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ D = 3^2 - 4 \cdot 2 = 1 \\ x_1 = \frac{3+1}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{3-1}{2} = 1 \end{array} \right| = \lim_{x \to 1} \frac{x-2}{-x-1} = \frac{1-2}{-1-1} = \frac{-1}{-2} = 0{,}5$$

чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{0}{0}$, иногда достаточно числить и знаменатель дроби разложить на множители и затем сократить дробь на множитель, приводящий к неопределенности;

д) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{4-x} - 2}{3x} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(\sqrt{4-x} - 2)(\sqrt{4-x} + 2)}{3x(\sqrt{4-x} + 2)} =$

$$\lim_{x \to 0} \frac{4 - x - 4}{3x(\sqrt{4-x} + 2)} = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{3x(\sqrt{4-x} + 2)} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{3 \cdot (\sqrt{4-x} + 2)} = -\frac{1}{12}$$

;чтобы раскрыть неопределенность типа $\frac{0}{0}$, зависящую от иррациональности, достаточно перевести иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и сократить на множитель, приводящий к неопределенности;

Вычисление производных

Задание 17.

Вычислите производную функции $f(x) = -2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 5x$.

Решение:
воспользуемся формулами и правилом 1 вычисления производных:

$$f'(x) = \left(-2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 5x \right)' = -2 \cdot 2x^{2-1} - \frac{1}{3} \cdot 3x^{3-1} + 5 \cdot 1x^{1-1} = -4x - x^2 + 5.$$

Задание 18.

Вычислите производную функции $f(x) = \sqrt{x}(x-3)$.

Решение:
воспользуемся формулами и правилом 2 вычисления производных:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}(x-3)\right)' = \left(\sqrt{x}\right)'(x-3) + \sqrt{x}(x-3)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3) + \sqrt{x} \cdot 1.$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3) + \sqrt{x} = \frac{x - 3 + 2x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}.$$

Задание 19. Вычислите производную функции $y = (x^2 + 3x + 10)^2$.

Решение:
представим заданную функцию как композицию квадратичной функции и степенной

$y = (x^2 + 3x + 10)^2$;

$g(x) = x^2 + 3x + 10$;

$f(x) = (g(x))^2$;

$$f'(x) = ((g(x))^2)' = 2g(x) \cdot (g(x))';$$

$y' = 2(x^2 + 3x + 10) \cdot (x^2 + 3x + 10)' = 2(x^2 + 3x + 10)(2x + 3).$

Задание 20. Найти четвертую производную $y = x^6 + 4x + 12$.

Решение:
вычисляем последовательно производные:

$$y' = 6x^5 + 4;$$

$$y'' = 30x^4;$$

$$y''' = 120x^3;$$

$$y^{IV} = 360x^2.$$

Уравнение касательной к графику функции

Задание 21. Найти уравнение касательной к графику функции f(x) = x3 – 2x2 + 1 в точке с абсциссой 2.

Решение.
Следуем алгоритму.
1) Точка касания xo равна 2. Вычислим f(xo):
f(xo) = f(2) = 23 – 2 · 22 + 1 = 8 – 8 + 1 = 1
2) Находим f ′(x). Для этого применяем формулы дифференцирования, изложенные в предыдущем разделе. Согласно этим формулам, x2 = 2x, а x3 = 3x2. Значит:
f ′(x) = 3x2 – 2 · 2x = 3x2 – 4x.
Теперь, используя полученное значение f ′(x), вычислим f ′(xo):
f ′(xo) = f ′(2) = 3 · 22 – 4 · 2 = 12 – 8 = 4.
3) Итак, у нас есть все необходимые данные: xo = 2, f(xo) = 1, f ′(xo) = 4. Подставляем эти числа в уравнение касательной и находим окончательное решение:
y = f(xo) + f ′(xo) (x – xo) = 1 + 4 · (x – 2) = 1 + 4x – 8 = –7 + 4x = 4x – 7.
Ответ.y = 4x – 7.

Задание 22. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = \frac{x^4}{4}$ в точке с абсциссой x0=1.

Решение. Находим производную функции

$$f'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$$

Тогда при x_0=1 значение производной равно

$$f'(1) = 1^3 = 1$$

Отсюда получаем, что угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой x_0=1 равен

$$k = f'(1) = 1$$

Ответ. 1.

Задание 23. Прямая*y= 8x-5* параллельна касательной к графику функции $y=x^2+7x+7$. Найдите абсциссу точки касания.
Решение. Условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов, следовательно *k=8* **.** Угловой коэффициент касательной – это есть значение производной функции в точке x_0.$f'(x_0) = 2x_0+7 = 8$, $2x_0 = -1$, $x_0 = -0{,}5$.
Ответ. -0,5.

Исследование функции с помощью производной

Задание 24. Найти точки перегиба функции $f(x) = x^4 - 2x^3$

<u>Решение:</u> $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$, $f''(x) = 12x^2 - 12x$

$$f''(x) = 0 \qquad 12x^2 - 12x = 0$$

$$12 \cdot x \cdot (x-1) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

x = -1 $\quad f''(-1) = 12\,(-1)\,(-1-1) = 24 \;\; (+)$

$x = \dfrac{1}{2} \qquad f''\left(\dfrac{1}{2}\right) = -3 \;\; (-)$

$x = 2 \qquad f''(2) = 24 \qquad (+)$

$x = 0\,, \quad x = 1$ - точки перегиба

Ответ: $\quad x = 0\,, \quad x = 1$ - точки перегиба

Задание 25. Исследовать функцию $y = (x+1)\cdot(x-2)^2$ и построить ее график.

Решение:

1) Данная функция является многочленом (можно раскрыть скобки, получим многочлен третьей степени), поэтому она определена, непрерывна и дифференцируема при любых x. Поэтому область определения функции – вся числовая прямая.

2) Вычислим точки пересечения графика функции с осями координат: график функции $y=(x+1)\cdot(x-2)^2$ пересекает ось Ox при y=0, т. е.

$$(x+1)\cdot(x-2)^2=0;$$

$$x+1=0 \text{ или } (x-2)^2=0;$$

$$x=-1 \text{ или } x=2.$$

График функции $y=(x+1)\cdot(x-2)^2$ пересекает ось Oy при x=0, т. е.

$$y=(0+1)\cdot(0-2)^2=1\cdot 4=4.$$

Т.е. мы получили три точки: (–1; 0), (2; 0), (0; 4).

3) Найдем промежутки монотонности функции и ее экстремумы с помощью первой производной:

$$y'=((x+1)\cdot(x-2)^2)'=3x\cdot(x-2).$$

Из уравнения $y'=0$ найдем критические точки:

$$3x\cdot(x-2)=0;$$

$$x_1=0,\ x_2=2.$$

Результаты решения занесем в таблицу:

x	$(-\infty, 0)$	0	(0; 2)	2	$(2; +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	↗	4	↘	0	↗
	возрастает	max	убывает	min	возрастает

Функция возрастает на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$, убывает на интервале (0; 2), имеет максимум при x=0 и минимум при x=2: $y_{max}=y(0)=4$; $y_{min}=y(2)=0$.

4) Найдем промежутки выпуклости и точки перегиба с помощью второй производной:

$$y''=(3x\cdot(x-2))'=6\cdot(x-1).$$

Кривая выпукла там, где $y''< 0$, т. е.

$$6\cdot(x-1) < 0,$$

x< 1.

Кривая вогнута там, где y′′> 0, т. е. x> 1.

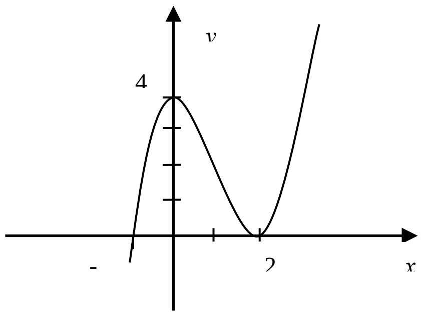
На интервале (–∞, 1) кривая выпукла; на интервале (1, +∞) – вогнута.

Точку перегиба найдем из уравнения y′′=0. Т. о., x=1 – абсцисса точки перегиба, т.к. эта точка разделяет интервалы выпуклости и вогнутости кривой. Ордината точки перегиба: y(1)=2.

Результаты решения занесем в таблицу:

x	(–∞, 1)	1	(1; +∞)
y′′	-	0	+
y		2	
	выпукла	перегиб	вогнута

5) По полученным точкам строим график:



Задание 26. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3$ на промежутке [-2; 0].

Решение:

вычислим критические точки функции, принадлежащие заданному промежутку, с помощью первой производной:

$$y' = 3 + 4x + x^2;$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0;$$

$$D = 16 - 12 = 4;$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2}{2};$$

$$x_1 = -1; \qquad x_2 = -3.$$

Т.к. -3 $\notin$ [-2; 0], x=-1 – критическая точка.

$$y(-1) = 3(-1) + 2(-1)^2 + \frac{1}{3}(-1)^3 = -3 + 2 - \frac{1}{3} = -1\frac{1}{3}, \ \underline{y(-1) = -1\frac{1}{3}}.$$

Вычислим значения функции на концах промежутка:

$$y(-2) = 3(-2) + 2(-2)^2 + \frac{1}{3}(-2)^3 = -6 + 8 - \frac{8}{3} = 2 - 2\frac{2}{3} = -\frac{2}{3},$$

$$\underline{y(-2) = -\frac{2}{3}}.$$

$\underline{y(0)=0}$.

Раздел 4. Интеграл и его применение

Содержание:

Применение определенного интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции. Формула Ньютона—Лейбница.
Примеры применения интеграла в физике и геометрии.

Первообразная и неопределённый интеграл

Задание 27. В интеграле $\int \frac{3x^2 + \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$ найти числовое значение С, при котором первообразная функция при *x=9* принимает значение, равное 25.

Решение. В подынтегральном выражении числитель почленно разделим на знаменатель, тогда получим

$$\int\left(\frac{3}{2}x^{3/2}+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{3}{2}\cdot\frac{x^{5/2}}{5/2}+\frac{1}{2}x+C=\frac{3}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{1}{2}x+C.$$

Из условия задачи известно, что первообразная функция, т.е. $\frac{3}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{1}{2}x+C$ при x = 9 принимает значение, равное 25, поэтому получим уравнение

$$\frac{3}{5}9^2\sqrt{9}+\frac{1}{2}9+C=25,\quad \frac{9^3}{5}+\frac{9}{2}+C=25,$$

Откуда *C = -125,3.*

Задание 28.. Найти уравнение кривой, проходящей через точку *A (-2;3)*, если касательная к кривой в каждой ее точке равна *3x.*

Решение. С геометрической точки зрения, первая производная от заданной функции есть угловой коэффициент касательной, проведенной к графику этой функции при данном значении аргумента x, т.е. $\frac{dy}{dx}=3x$. Приведем к общему знаменателю и проинтегрируем обе части:

$$dy=3xdx,\quad \int dy=3\int xdx$$

откуда $y=\frac{3}{2}x^2+C$

По условию задачи кривая проходит через точку А (-2;3). Подставив вместо x и y ординаты этой точки получим

$$3=\frac{3}{2}(-2)^2+C,\ 3=6+C,\ \text{откуда}\ C=-3$$

Уравнение кривой примет вид $y=\frac{3}{2}x^2-3$

Задание 29. Найти $\int(5x^3-2)^{10}x^2dx$.

Решение. Примем способ подстановки. Пусть $5x^3-2=t$, тогда

$$(5x^3-2)'dx=t'dt.\ 15x^2dx=dt,\ x^2dx=\frac{dt}{15},$$

тогда

$$\int(5x^3-2)^{10}dx=\int t^{10}\frac{dt}{15}=\frac{1}{15}\int t^{10}dt=\frac{1}{15}\cdot\frac{t^{11}}{11}+C=\frac{1}{165}t^{11}+C,$$

но $t=5x^3-2$ следовательно,

$$\int(5x^3-2)^{10}x^2dx=\frac{1}{165}(5x^3-2)^{11}+C$$

Задание 30. Найти $\int\sin^5 x\cos xdx$

Решение. пусть $\sin x=t$, тогда $(\sin x)'dx=t'dt,\cos xdx=dt$ следовательно,

$$\int\sin^5 x\cos xdx=\int t^5dt=\frac{1}{6}t^6+C=\frac{1}{6}\sin^6 xdx+C$$

Задание 31. Найти $\int\frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}$

Решение

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{5(1-3/5x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}x\right)^2}}.$$

Пусть $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}x=t$, тогда $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}dx=dt$, $dx=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}dt$.

Следовательно,

.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin t + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}x\right) + C$$

Задание 32.. Найти $\int 5^{7x}dx$.

Решение. По формуле $\int a^{kx}dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{a^{kx}}{\ln a} + C$ имеем

$$\int 5^{7x}dx = \frac{1}{7} \cdot \frac{5^{7x}}{\ln 5} + C$$

Вычисление определённого интеграла

Задание 33.

Вычислите определенный интеграл $\int_0^1 (5x^5 + 4x^3 - 5x - 2)dx$.

Решение.

$$\int_0^1 (5x^5 + 4x^3 - 5x - 1)dx = 5\int_0^1 x^5dx + 4\int_0^1 x^3dx - 5\int_0^1 xdx - 2\int_0^1 dx = \left(\frac{5x^6}{6} + \frac{4x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{5\cdot 1^6}{6} + \frac{4\cdot 1^4}{4} - \frac{5\cdot 1^2}{2} - 2\cdot 1\right) - 0 = -4\frac{1}{3}$$

Задание 34.. Вычислите определенный интеграл $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

Решение.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -(ctg\frac{\pi}{3} - ctg\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{3}}{3} + 1 = \frac{1-\sqrt{3}}{3}.$$

Задание 35.. Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}$.

Решение.

Используя формулу (16), получим

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{3^2+x^2} = \frac{1}{3} arctg\frac{x}{3}\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} arctg\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3} arctg 0 = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{\pi}{18}$$

.

Задание 36.. Вычислите определенный интеграл $\int_4^5 (4-x)^3 dx$.

Решение.

Используя формулу (20), получим

$$\int_4^5 (4-x)^3 dx = \frac{(4-x)^4}{-4}\Bigg|_4^5 = \frac{(4-5)^4}{-4} - \frac{(4-4)^4}{-4} = -\frac{1}{4} + 0 = -\frac{1}{4}.$$

Задание 37.. Вычислите определенный интеграл $\int_{-1}^2 (x^2-1)^3 \cdot xdx$.

Решение.

$$\int_{-1}^{2}(x^2-1)^3xdx=\left[\begin{array}{l} x^2-1=t \\ 2xdx=dt \\ xdx=\frac{1}{2}dt \\ t_н=(-1)^2-1=0 \\ t_в=2^2-1=3 \end{array}\right]=\int_0^3 t^3\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int_0^3 t^3dt=\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{t^4}{4}\right|_0^3=\frac{3^4}{8}-\frac{0^4}{8}=\cdot$$

Задание 38.. Вычислите определенный интеграл $\int_{-1}^{2}(x^2-1)^3\cdot xdx$.

Решение.

$$\int_{-1}^{2}(x^2-1)^3xdx=\left[\begin{array}{l} x^2-1=t \\ 2xdx=dt \\ xdx=\frac{1}{2}dt \\ t_н=(-1)^2-1=0 \\ t_в=2^2-1=3 \end{array}\right]=\int_0^3 t^3\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int_0^3 t^3dt=\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{t^4}{4}\right|_0^3=\frac{3^4}{8}-\frac{0^4}{8}=$$

Применение интеграла к вычислению физических величин и площадей

Задание 39. Скорость движения точки изменяется по закону $V=(3t^2+2t+1)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 10с от начала движения.

Решение:

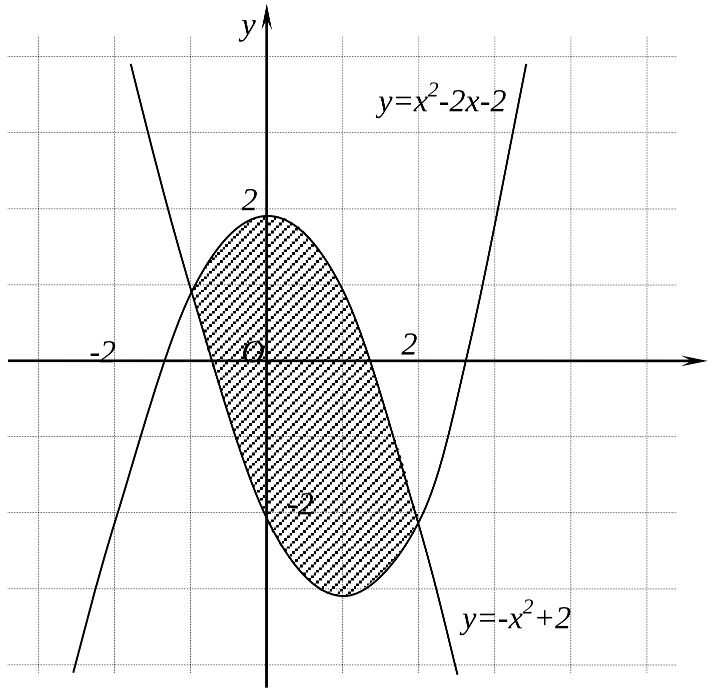
согласно условию, $f(t)=3t^2+2t+1$, $t_1=0$, $t_2=10$. По формуле

$S=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$ находим

$$S=\int_0^{10}(3t^2+2t+1)dt=\left.\left(\frac{3t^3}{3}+\frac{2t^2}{2}+t\right)\right|_0^{10}=\left(t^3+t^2+t\right)\Big|_0^{10}=10^3+10^2+10=1110$$

Задание 40.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.



$$S = \int_{-1}^{2}((-x^2+2)-(x^2-2x-2))\,dx = \int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,dx =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right)\Big|_{-1}^{2} = -\frac{16}{3}+4+8-\left(\frac{2}{3}+1-4\right) = 9 \text{ (кв. ед.)}$$

Раздел 5. Элементы теории и математической статистики
Содержание;

Основные понятия комбинаторики. Задачи на подсчет числа размещений, перестановок, сочетаний. Решение задач на перебор вариантов. Формула бинома Ньютона. Свойства биноминальных коэффициентов. Треугольник Паскаля. Событие, вероятность события, сложение и умножение вероятностей. Понятие о независимости событий. Дискретная случайная величина, закон ее распределения. Числовые характеристики дискретной случайной величины. Понятие о законе больших чисел.

Задание 41. Найти число размещений из 10 элементов по 4.
Решение:
по формуле $A_n^m = n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)]$:

$$A_{10}^4 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040.$$

Задание 42. Решить уравнение: $A_n^5 = 30A_{n-2}^4$.
Решение:
используя формулу для вычисления числа размещений имеем:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 30(n-2)(n-3)(n-4)(n-5).$$

Разделим обе части на одинаковые выражения, получим:

$$n(n-1) = 30(n-5),$$

и решим получившееся квадратное уравнение:
$n_1 = 6,\ \ n_2 = 25$.

Задание 43. Решите систему: $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 66 \end{cases}$.

Решение:
решим второе уравнение:

$$C_x^2 = 66 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{1\cdot 2} = 66;$$

$$x^2 - x - 132 = 0;$$

$$x_1 = -11,\ \ x_2 = 12.$$

Т. к. $x > 2$, то –11 не удовлетворяет условию задачи.
Подставив x=12 в первое уравнение системы, получим

$$C_{12}^y = C_{12}^{y+2}.$$

Используя основное свойство сочетаний, имеем:

$$C_{12}^y = C_{12}^{12-y},$$

тогда

$$C_{12}^{12-y} = C_{12}^{y+2} \Rightarrow 12 - y = y + 2 \Rightarrow y = 5.$$

Ответ: x=12, y=5.

Задание 44. Сколькими способами из восьми кандидатов можно выбрать три лица на три должности?
Решение:

условию задачи соответствуют размещения 3 из 8, имеем:

$$A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

Задание 45. Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 черных шара, вынимают наудачу два шара. Найти вероятность того, что оба шара окажутся черными?

Решение:

общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 (12+8) элементов по два:

$$n = C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190;$$

число благоприятных исходов m равно числу сочетаний из 8 элементов по два:

$$n = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28.$$

По определению: P(A)=28/190=0,147.

Задание 46. В партии из 18 деталей находятся 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Какова вероятность того, что из этих 5 деталей две окажутся бракованными?

Решение:

число всех равновозможных независимых исходов n равно числу сочетаний из 18 по 5:

$$n = C_{18}^5 = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 8568.$$

Подсчитаем число благоприятных исходов m. Среди 5 взятых наугад деталей должно быть 3 качественных и 2 бракованных. Число способов выборки двух бракованных деталей из 4 имеющихся бракованных равно числу сочетаний из 4 по 2:

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

Число способов выборки трех качественных деталей из 14 имеющихся равно числу сочетаний из 14 по 3:

$$C_{14}^3 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 364.$$

Любая группа качественных деталей может комбинироваться с любой группой бракованных, поэтому общее число комбинаций m равно:

$$m = C_4^2 \cdot C_{14}^3 = 6 \cdot 364 = 2184,$$

по определению: P(A)=2184/8568=0,255.

Раздел 6.Уравнения и неравенства

Содержание:

Рациональные, иррациональные, показательные и тригонометрические уравнения и системы .Равносильность уравнений, неравенств, систем. Основные приемы их решения (разложение на множители, введение новых неизвестных, подстановка, графический метод)**.** Рациональные, иррациональные, показательные
и тригонометрические неравенства. Основные приемы их решения. Метод интервалов. Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений и неравенств с двумя переменными и их систем.

Задание 47. Решить уравнение

$$\frac{5+2x}{4x-3} = \frac{3 \cdot (x+1)}{7-x}$$

$$\frac{5+2x}{4x-3}=\frac{3\cdot(x+1)}{7-x}\Bigg|\cdot(4x-3)\cdot(7-x)$$

$$\frac{5+2x}{4x-3}=\frac{3\cdot(x+1)}{7-x}\Bigg|\cdot(4x-3)\cdot(7-x)$$

$$(5+2x)\cdot(7-x)=(3x+3)\cdot(4x-3)$$

$$-14x^2+6x+44=0$$

$$14x^2-6x-44=0$$

$x_1=2 \quad x_2=-5{,}5$

Проверка:

x= 2 $\quad 4\cdot 2-3=5\neq 0 \quad 7-2=5\neq 0$

x = - 5,5 $\quad 4\cdot(-5{,}5)-3=-25\neq 0 \quad 7-(-5{,}5)=7+5{,}5=12{,}5$

Ответ: $x_1=2 \quad x_2=-5{,}5$

Задание 48. Уравнения $x^2-4=0$ и $(x+2)(2^x-4)=0$ - равносильны?

Решение:

$x^2-4=0$ имееткорних $=\pm\mathbf{2}$, $\quad$ т. к. $x^2=4$;

$(x+2)(2^x-4)=0$, $\quad$ т. к. $x+2=0$, $\quad \mathbf{x=-2}$

и $2^x=4,\ 2^x=2^2,\ x=\mathbf{2}.$

Ответ: да, таккакимеютодинаковыекорни.

Задание 49. Проверить на равносильность уравнения: $x^2+1=0$ и $\sqrt{x}+2=0$.

Решение:

$x^2+1=0$ – неимееткорнейвобластидействительныхчисел

и $\sqrt{x}+2=0$ – неимееткорнейвобласти $R=(-\infty;\ +\infty)$

Ответ: равносильны, так как они не имеют корней.

Задание 50. Определить уравнение-следствие при решении уравнений $x-2=3$ и $x^2-25=0$.

Решение:

Уравнение $x-2=3$ имеет корень 5, уравнение $x^2-25=0$ имеет корни ± 5. Так как корень уравнения $x-2=3$ является корнем уравнения $x^2-25=0$, то уравнение $x^2-25=0$ является следствием уравнения $x-2=3$.

Задание 51. Решить двумя способами уравнения и сделать вывод:

а) $\sqrt{x+11}=x-1$;

б) $\sqrt{x-5}=\sqrt{2-x}$.

Решение:

а) <u>первый способ:</u>

ОДЗ:

$x+11\geq 0$

$x\geq -11$

$(\sqrt{x+11})^2=(x-1)^2, \qquad x+11=x^2-2x+1$

$x^2-3x-10=0,$

$x_1=-2; \quad x_2=5.$

Оба корня принадлежат ОДЗ уравнения, но это не меняет сути дела и мы вынуждены выполнить проверку корней.

Проверка: при $x_1=-2$, получим $\sqrt{-2+11}=-2-1$ - неверное равенство, $x_1=-2$ - посторонний корень;

при $x_2=5$, получим $\sqrt{5+11}=5-1$ или $4=4$ - верное равенство, 5 - корень исходного уравнения.

Ответ: 5

<u>второй способ:</u>

Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}x+11=(x-1)^2\\x-1\geq 0\end{cases}\langle=\rangle\begin{cases}x_1=-2, x_2=5\\x\geq 1\end{cases}$$

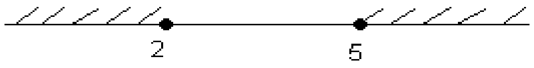
Решение системы исходного уравнения $x_2=5$.

Ответ: 5

б) <u>первый способ:</u>

ОДЗ:

$\begin{cases} x-5 \ge 0 \\ 2-x \ge 0 \end{cases} \langle=\rangle \begin{cases} x \ge \\ x \le \end{cases}$



Решений нет

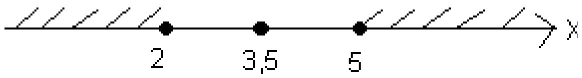
Значит, ОДЗ уравнения пустое множество, уравнение решений не имеет

Ответ: корней нет

<u>второй способ</u>:

Исходное уравнение равносильно системе:

$\begin{cases} x-5 = 2-x \\ x-5 \ge 0 \\ 2-x \ge 0 \end{cases} \langle=\rangle \begin{cases} x = 3, \\ x \ge 5 \\ x \le 2 \end{cases}$



Системы решений не имеют, значит, и исходное уравнение тоже решений не имеет

Ответ: корней нет.

Задание 52. Решить уравнение: $|2x-3| = 5$

ОДЗ:

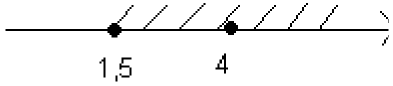
$x \in R = (-\infty;\ +\infty)$.

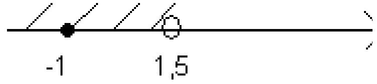
Решение: Данное уравнение равносильно системам, на основании определения

модуля: $|a| = \begin{cases} a, если a \ge 0 \\ -a, если a < 0 \\ 0, если a = 0: \end{cases}$

$\begin{cases} 2x-3 \ge 0 \\ 2x-3 = 5 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x-3 < 0 \\ -2x+3 = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} x \ge 1,5 \\ x = 4 \end{cases} \begin{cases} x < 1,5 \\ x = -1 \end{cases}$





$x = 4$ $\qquad$ $x = -1$

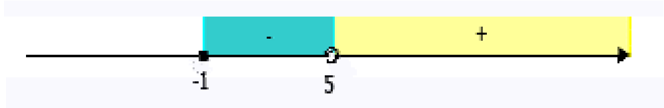
Ответ: $-1;\ \ 4.$

Задание 53.. Решить неравенство. $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-5} \ge 0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+1 \ge 0, \\ x-5 \ne 0; \end{cases}$ откуда имеем x $\in$ [-1; 5) $\cup$ (5; + ∞)

Решим уравнение $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-5} = 0.$ Числитель дроби равен 0 при x = -1, это и есть корень уравнения. Отметим найденный корень на чертеже (черным кружком, т.к. неравенство нестрогое), предварительно отметив ОДЗ:



Чтобы определить знак на промежутке (-1; 5) возьмем число 0, $f(0) = \dfrac{\sqrt{0+1}}{0-5} = -\dfrac{1}{5} < 0,$

Чтобы определить знак на втором промежутке возьмем число 8, $f(8) = \dfrac{\sqrt{8+1}}{8-5} = \dfrac{3}{3} > 0.$

Точки 0 и 8 выбирались произвольно, но так, чтобы упростить процесс вычисления каждого значения функции.

Ответ: (-5; + ∞).

Решение показательных неравенств сводится к решению простейших неравенств вида $a^x \succ a^b$ или $a^x \prec a^в$

Если a>1и $a^x \succ a^b$, то $x > b$

Если 0 <a<1 и $a^x \succ a^b$, тоx<b

Задание 54. Решить неравенство $\left(\sqrt{5}\right)^{4-x} \geq \frac{1}{125}$

Решение

$$5^{\frac{4-x}{2}} \geq 5^{-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{4-x}{2} \geq -3 \quad \Rightarrow \quad 4-x \geq -6 \quad \Rightarrow \quad -x \geq -10 \quad \Rightarrow \quad x \leq 10$$

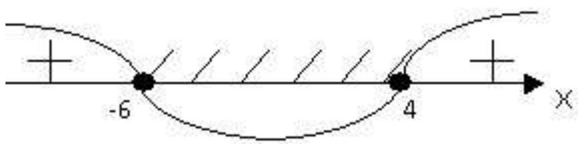
Ответ: $x \leq 10$

Задание 55. Решить неравенство $\mathbf{64^x + 2 \cdot 8^x - 24 \leq 0}$.

Решение

Пусть $8^x = y, y > 0$, тогда неравенство примет вид:

$y^2 + 2y - 24 \leq 0$;



$\left[\begin{array}{l} y_1 = -6 \\ y_2 = 4, \end{array}\right.$ решением неравенства $y^2 + 2y - 24 \leq 0$ является промежуток $[-6; 4]$,

но по условию y> 0 , поэтому получаем $0 \leq 8^x \leq 4$

$8^x \leq 4$;

$2^{3x} \leq 2^2$;

$3x \leq 2$

$x \leq \frac{2}{3}$.

Ответ: $x \leq \frac{2}{3}$

Задание 56. Решить неравенство $\lg(x+1) \leq 2$

Решение

$\lg(x+1) \leq 2 \qquad 2 = \lg 100$

$\lg(x+1) \leq \lg 100$

$a = 10, \quad a \succ 1 \quad \Rightarrow \quad x + 1 \leq 100$

$x \leq 99$

Область определения: $x + 1 > 0$

x> -1

Общее решение: $\begin{cases} x \leq 99, \\ x \succ -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \prec x \leq 99$

Ответ: $-1 \prec x \leq 99$