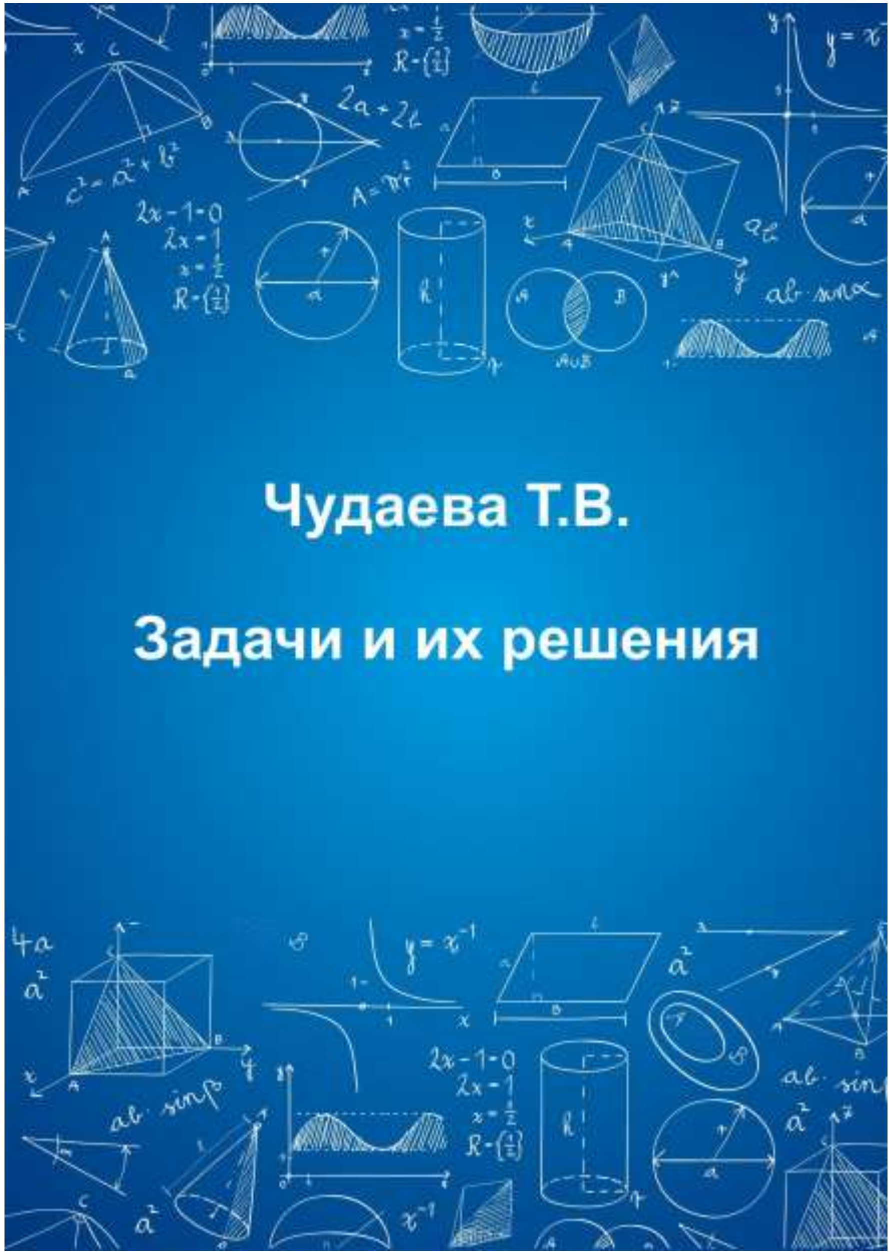


Чудаева Т. В.
Задачи и их решения. [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие /Т В. Чудаева. – Барнаул : КГБПОУ «АПТ», 2019.- 41 с.

Пособие разработано в соответствии с программой курса «Математика».

Оно предназначено для организации самостоятельной работы студентов 1-го курса.

В пособии содержатся задачи различного уровня сложности по основным разделам. Для каждой задачи в чёткой и доступной форме с использованием современных математических символов изложены методики, позволяющие понять и усвоить приемы решения задач различных типов.

Раздел 1. Развитие понятия о числе

Содержание учебного материала

Целые и рациональные числа. Действительные числа. *Приближенные вычисления*. *Комплексные числа*

Арифметические действия над рациональными числами

Задание 1.

Вычислить $\frac{0{,}725+0{,}6+\frac{7}{40}+\frac{11}{20}}{0{,}128\cdot6\frac{1}{4}-0{,}034:\frac{3}{25}}$ - 0,25

Повторить различные формы записи числа, переход от рациональной дроби к десятичной и наоборот.

Выполнение отдельных действий:

1) $\frac{7}{40}+\frac{11}{20}=\frac{7+22}{40}=\frac{29}{40}$; $\frac{29}{40}$ можно представить в виде десятичной дроби :$\frac{29}{40}$ =0,725.

Можно сначала исходные десятичные дроби перевести в десятичные:

$\frac{7}{40}$ =0,175; $\frac{11}{20}$ =0,55; тогда 0.175+0,55 = 0,725.

Сложение можно выполнить устно:

0,725 +0,6+0,725 = 2· 0,725+0,6=1,45+0,6=2,05.

Полученное число можно записать неправильной дробью:

2, 05=2+$\frac{1}{20}=\frac{41}{20}$

2) 0.0345: $\frac{3}{25}$ =0,0345:0,12=3,45: 1,2=1,15:4= 0,2875, или $\frac{345}{10000}:\frac{3}{25}=\frac{3\cdot5\cdot23\cdot25}{2^4\cdot5^4\cdot3}=\frac{23}{2^4\cdot5}=\frac{23}{80}$; $0{,}128\cdot6\frac{1}{4}=\frac{128\cdot25}{1000\cdot4}=\frac{2^7\cdot5^2}{5^3\cdot2^5}=\frac{4}{5}$.
Видно, в знаменателе выгоднее выгоднее вычислять в обыкновенных дробях;
$\frac{4}{5}-\frac{23}{80}=\frac{64-23}{80}=\frac{41}{80}$.
Поделим числитель на знаменатель: $\frac{41}{20}:\frac{41}{80}=\frac{41}{20}\cdot\frac{80}{41}=4$

3) $4\cdot0.25=1$
Ответ: 1

Задание 2.

Записать рациональные числа в виде бесконечной периодической десятичной дроби: 25; -7; -2,3;

Решение:

Натуральное число 25 = 25,00…= 25,(0); целое число -7 = -7,00…= -7,(0);

десятичные дроби -2,300…= - 2,3(0); 1,533…=1,5(3) .

Задание 3.

Представить бесконечную периодическую десятичную дробь 0,2(18) в виде обыкновенной дроби.

1. Пусть x= 0,2(18) умножая на 10, получаем 10x = 2,1818…(Нужно умножить дробь на 10^n, где n – количество

десятичных знаков, содержащихся в записи этой дроби до периода: $x10^n$).

2. Умножая обе части последнего равенства на 100, находим

1000x = 218,1818…(Умножая на 10^k, где k – количество цифр в периоде $x10^n10^k=x10^{n+k}$).

3. Вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем 990x = 216, x $=\frac{216}{990}=\frac{108}{495}$

Стандартная запись числа

Способ перевода числа в стандартную запись: $x= a\cdot 10^к$, $1 \ll a< 10$

$34600=3.46\cdot 10^4$ –показатель 4 – число цифр после первой;

$0,0623=6,23\cdot 10^{-2}$ –показатель -2 –число цифр после нуля по первую значащую (с минусом).

$5750000=5,75\cdot 10^6$

$0,342=3,42\cdot 10^{-1}$

Округление чисел

Правило округления чисел: Если первая слева отбрасываемая цифра меньше 5, то округляют с недостатком, если это цифра 5 или больше, то округляют с избытком.

Задание 4

Округлить числа с заданной точностью*:*

5,739 (с точностью до 0,01) $\approx 5,74$

3, 53 (с точностью до целых) ≈ 4

30253 (с точностью до 1000) ≈ 30000

Вычислить произведение с заданной точностью 10^{-2}: A=2,6541 $\cdot$ 12,0344.

Можно использовать калькулятор A $=2,6541\cdot 12,0344\ldots\approx 31,94$.

Другое решение: округлить числа с различной точностью (заданной и большей) и после этого перемножить;

1)10^{-2}: $2,65\cdot 12,03 = 31,8795 \approx 31,88$

2)10^{-3}: $2,654\cdot 12,034=31.938236 \approx 31,94$.

Из этих вычислений ясно, что для получения произведения с некоторой т нельзя брать множители с той же точностью. Приходится их брать с большей точностью.

Абсолютная и относительная погрешность

Абсолютной погрешностью приближения называется модуль разности между точным значением величины и ее приближенным значением.

$\Delta = |a - x|$, где Δ – абсолютная погрешность, x – приближенное значение некоторой величины (например, полученное путём однократного измерения этой величины), а – ее точное значение величины,

$= |a - x| \Rightarrow$ a - x= $\pm\Delta \Rightarrow$ a = x $\pm\Delta$

Задание 5

Найти абсолютную погрешность приближения 0,44 числа 4/9.

$$\Delta = \left|\frac{4}{9} - 0{,}44\right| = \left|\frac{4}{9} - \frac{11}{25}\right| = \left|\frac{100-99}{225}\right| = \frac{1}{225}$$

Относительной погрешностью называется отношение абсолютной погрешности к приближенному значению измеряемой величины. Обычно выражается в процентах.

R $=\frac{\Delta}{a}$

Задание 6.

Сравнить точность двух измерений.

d = 4 $\pm$ 0,3; H = 600 $\pm$ 0,3

$$r(d) = \frac{0{,}3}{4} = \frac{3}{10} \div 4 = \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{40} = 0{,}075 = 7{,}5\%$$

r(H)=

$$\frac{0{,}3}{600} = \frac{3}{10} \div 600 = \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{600} = \frac{3}{6000} = \frac{1}{2000} = 0{,}5\cdot 0{,}001 = 0{,}0005 = 0{,}05\%$$

Второе измерение более точное

Действия над комплексными числами

Формы комплексного числа.
Алгебраическая $z = a + bi$
сложение: $(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
умножение: $(a_1 + b_1 i)\cdot(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i - b_1 b_2$
деление: $\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)}$

Задание 7.

Даны числа z_1 = 4 – i, z_2 = -5 +3i

Вычислить : $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$

$z_1 + z_2 =$ (4 – i) +(-5 +3i) =-1+2i

$z_1 - z_2 =$ (4 – i) - (-5 +3i) =9- 4i

$z_1 \cdot z_2 =$ (4 – i)$\cdot$ $(-5+3i) = -20 + 12i + 5i - 3i^2$=-20+17i+3=-17+17i

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 - i}{-5 + 3i} = \frac{(4-i)\cdot(-5-3i)}{(-5+3i)\cdot(-5-3i)} = \frac{-20-12i+5i+3i^2}{25-9i^2} = \frac{-21-17i}{34}$$

Раздел 2. Корни, степени, логарифмы

Содержание учебного материала

Корни натуральной степени из числа и их свойства. Степени с рациональными показателями, их свойства. Степени с действительными показателями. Свойства степени с действительным показателем. Основное логарифмическое тождество. Десятичные и натуральные логарифмы. Правила действий с логарифмами. Переход к новому основанию. Преобразование рациональных, иррациональных степенных, показательных и логарифмических выражений.

Вычисления

а) Корни (преобразования радикалов)

$\sqrt{750}$=$\sqrt{2\cdot 3\cdot 5^3}$=$5\sqrt{30}$;

$\sqrt{10}$=$\sqrt[6]{10^3}$; $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}$ =$\sqrt[6]{8}\cdot\sqrt[6]{9}=\sqrt[6]{72}$

Задание 8.

Вычислить:$\frac{\sqrt{10}\cdot\sqrt[6]{343}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{250}}=\frac{\sqrt{10}\cdot\sqrt[6]{7^3}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{2\cdot 5^3}}=\frac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot 5\sqrt{10}}=\frac{1}{5}$

Задание 9.

Упростите выражение $\frac{(\sqrt[4]{a^3b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}}b^6}}$, где $b>0$, $a>0$

Используя свойства арифметического корня, получаем

$$\frac{(\sqrt[4]{a^3b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}}b^6}}=\frac{a^3b^2}{\sqrt[6]{a^{12}b^6}}=\frac{a^3b^2}{a^2b}=ab$$

Задание 10.

Вычислите: $\sqrt[5]{7-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{7+\sqrt{17}}$.

Решение:

$$\sqrt[5]{7-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{7+\sqrt{17}}=\sqrt[5]{\left(7-\sqrt{17}\right)\left(7+\sqrt{17}\right)}=\sqrt[5]{7^2-(\sqrt{17})^2}=\sqrt[5]{49-17}=$$
$$=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2.$$

б) Степени (освобождение от отрицательных степеней)

$3^{-3}=\frac{1}{27}$; $(0,5)^{-2}=(\frac{1}{2})^{-2}=2^2$=4; $(\frac{1}{16})^{-\frac{3}{4}}=16^{\frac{3}{4}}=(2^4)^{\frac{3}{4}}=2^3$=8

Вычислить: $\frac{((\frac{1}{3})^{-\frac{2}{3}})^6\cdot 2^{-4}}{3^{-2}}=\frac{3^4\cdot 3^2}{2^4}=\frac{3^6}{2^4}=\frac{729}{16}$

Задание **11.**

Вычислить:

$$8^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{\frac{1}{3}}-16:16^{\frac{3}{4}}+\left(9^{\frac{1}{7}}\right)^{\frac{7}{2}}=8^{\frac{2}{3}}-16^{\frac{1}{4}}+9^{\frac{1}{2}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}-\left(2^4\right)^{\frac{1}{4}}+\left(3^2\right)^{\frac{1}{2}}=2^2-2+3=4-$$

Задание 12. Решить уравнение; $\sqrt{x-9}=\sqrt{1-x}$

.Это уравнение можно решить по такой же методике как и в первом примере, но мы поступим иначе.

Найдем ОДЗ данного уравнения. Из определения квадратного корня следует, что в данном уравнении одновременно должны выполнятся два условия:

а) x - 9≥0;

x≥ 9;

б) 1 - x≥0;

-x≥-1 ;

x≤1.

ОДЗ данного уравнения: x∈ ∅ .

Ответ: корней нет.

в) Логарифмы (основное логарифмическое тождество a^{logab}=b (где b>0, a>0 и a≠0) и связь между логарифмами по основаниям a и a^k ($\log_{a^k} x = \frac{1}{k}\log_a x$)

Задание **13**.

Вычислить: $\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1,25 = \log_{9,8} 3 \cdot \frac{\log_{0,8} 1,25}{\log_{0,8} 3}$ =$\log_{0,8} 1,25 =$ $\log_{\frac{4}{5}} \frac{5}{4} = -1$

Вычислить: $\log_{\sqrt{3}} 27 + \log_{\frac{1}{3}} 9 - 4\log_{\frac{2}{3}} \sqrt{3} = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^3 + \log_{3^{-1}} 3^2 -$

$4\log_{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{2}}$ =2$\log_3 3^3$ -$\log_3 3^2$

-4($\log_3 3^{\frac{1}{2}}$)^2 =6-2-4($\frac{1}{2}$)^2 =6-2-1=3.

Область определения логарифмической функции

Задание 14.

Найти область определения функции:f(x)=$\frac{1}{\log_2(x+3)}$

Решение:

$$\begin{cases} x+3>0 \\ x+3\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x\neq -2 \end{cases}$$

Ответ: область определения: D(f)= (-3;-2) ∪ $(-2; +\infty)$

Задание 15. Найти область определения функции;f(x) =$\sqrt{x} \cdot \ln(9 - x^2)$

Решение: в данной функции у нас присутствует и корень и логарифм. Подкоренное выражение должно быть неотрицательным: x≥ 0 , а выражение под знаком логарифма – строго положительным: 9-x^2 > 0. Таким образом, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 9 - x^2 > 0 \end{cases}$$

Многие из вас прекрасно знают или интуитивно догадываются, что решение системы должно удовлетворять каждому условию.

Исследуя расположение параболы $y=-x^2+9$ относительно оси OX , приходим к выводу, что неравенству $9-x^2>0$

удовлетворяет интервал (-3;3) (синяя штриховка):

Неравенству $x\geq 0$, очевидно, соответствует «красный» полуинтервал [0;∞)

Поскольку оба условия должны выполняться одновременно, то решением системы является пересечение данных интервалов. «Общие интересы» соблюдены на полуинтервале [0;3) .

Ответ: область определения: D(f)= [0;3)

Показательные уравнения и неравенства

Задание 16. Решить уравнение: $5^{2x+1}-26\cdot 5^x+5=0$

Решение: используем подстановку $5^x=y$

Уравнение тогда принимает вид

$5y^2-26y+5=0$,
D = 169 – 25 = 144,
$y_1=5$ $y_2=1/5$

Переходя к обратной подстановке, получаем:
$5^x=5$
$x=1$,
$5^x=1/5$
$x=-1$

Ответ: $x=1$ и $x=-1$

Решите уравнение: $(\frac{1}{4})^x=(\frac{1}{5})^x$

Решение: обе части исходного уравнения можно поделить на $0{,}2^x$. Данный переход будет являться равносильным, поскольку это выражение больше нуля при любом значении x (показательная функция строго положительна на своей области определения). Тогда уравнение принимает вид: $(\frac{5}{4})^x=1 \Leftrightarrow (\frac{5}{4})^x = (\frac{5}{4})^0 \Leftrightarrow x=0$

Ответ: $x=0$.

Задание 17. Решите уравнение: $3^{x-1}-(\frac{1}{3})^{3-x}=\sqrt{\frac{1}{9^{4-x}}}+207$

Решение: ограничений на область допустимых значений у уравнения нет, так как подкоренное выражение имеет смысл при любом значении x (показательная функция $y=9^{4-x}$ положительна и не равна нулю).

Решаем уравнение путем равносильных преобразований с использованием правил умножения и деления степеней:

$3^{x-1}-(\frac{1}{3})^{3-x}=\sqrt{\frac{1}{9^{4-x}}}+207$

$3^{x-1} - 3^{x-3} = \sqrt{3^{2x-8}} + 207$

$3^{x-1} - 3^{x-3} - 3^{x-4} = 207$

$3^{x} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81}\right) = 207$

$3^{x} \cdot \frac{23}{81} = 207$

$3^{x} = 3^{6} \Leftrightarrow$ x=6

Ответ: x = 6.

Показательными называются неравенства, в которых неизвестная переменная содержится только в показателях каких-либо степеней.

Для решения показательных неравенств требуется знание следующей теоремы:

Теорема 2. Если a > 1, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того же смысла: f(x) > g(x). Если 0 < a < 1, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла: f(x) < g(x).

Задание 18. Решите неравенство: $16^{x} - 2 \cdot 12^{x} \leq 3^{2x+1}$

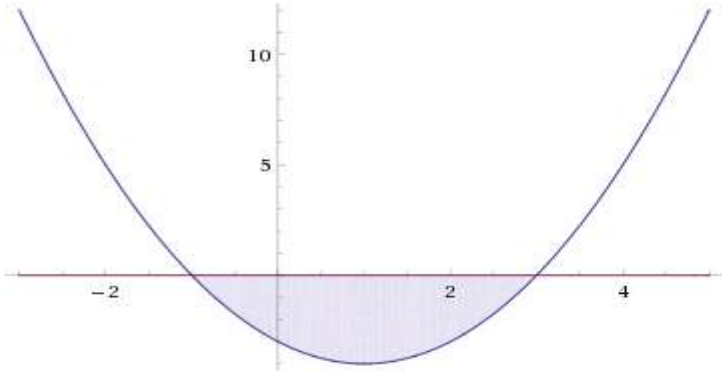
Решение: представим исходное неравенство в виде:

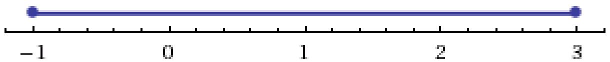
$4^{2x} - 2 \cdot 4^{x} \cdot 3^{x} - 3 \cdot 3^{2x} \leq 0$. Разделим обе части этого неравенства на 3^{2x}, при этом (в силу положительности функции $y = 3^{2x}$) знак неравенства не изменится:

$\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{x} - 3 \leq 0.$

Воспользуемся подстановкой: $t = \left(\frac{4}{3}\right)^{x}$

Тогда неравенство примет вид: $t^2 - 2t - 3 \leq 0$.





Итак, решением неравенства является промежуток: $-1 \leq t \leq 3$,

переходя к обратной подстановке, получаем: $-1 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{x} \leq 3$

Левое неравенства в силу положительности показательной функции выполняется автоматически. Воспользовавшись известным свойством логарифма, переходим к эквивалентному неравенству:

$(\frac{4}{3})^x \le (\frac{4}{3})^{\log_{4/3} 3}$. Поскольку в основании степени стоит число, большее единицы, эквивалентным (по теореме 2) будет переход к следующему неравенству: $x \le \log_{\frac{4}{3}} 3$

Итак, окончательно получаем ответ: $x \in (-\infty;\ \log_{\frac{4}{3}} 3]$.

Логарифмические уравнения и неравенства

Задание 19. Решить уравнение $\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3$

Решение

$\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3 \qquad 3=\log_2 8$

$\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=\log_2 8$

$(x+1)\cdot(x+3)=8$

$x^2+4x+3=8$

$x^2+4x-5=0$

$x_1=1, \quad x_2=-5$

Проверка

$x=1 \qquad \log_2(1+1)+\log_2(1+3)=\log_2 2+\log_2 4=1+2=3$ - левая часть

3=3 $\Rightarrow x=1$ – корень уравнения

$x=-5 \qquad \log_2(-5+1)+\log_2(-5+3)=\log_2(-4)+\log_2(-2)$ - левая часть не имеет смысла $\Rightarrow$

x = -5 не является корнем

Ответ: $x = 1$

Задание 20. Решите уравнение:$\lg(x^2\text{-}6)=\lg(8+5x)$

Решение. В область допустимых значений входят только те x, при которых выражение, находящееся под знаком логарифма, больше нуля. Эти значения определяются следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} x^2-6>0, \\ 8+5x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2>6, \\ x>-1{,}6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6};+\infty) \\ x \in (-1{,}6;+\infty). \end{cases}$$

С учетом того, что -1,6= $-\sqrt{2{,}56} > -\sqrt{6}$, получаем промежуток, определяющий область допустимых значений данного логарифмического уравнения: $x \in (\sqrt{6};+\infty)$. На основании теоремы 1, все условия которой здесь выполнены, переходим к следующему равносильному квадратичному уравнению:

x^2- 6=8+5x$\Leftrightarrow x^2$-5x-14=0 $\Leftrightarrow x_1=7, x_2$=-2 В область допустимых значений входит только первый корень. Ответ: x = 7.

При решении простейших логарифмических неравенств типа $\log_a x \succ \log_a b$ необходимо использовать следующее правило:

Если a> 1, то знак неравенства не меняется , т.е. $x > b$

Если 0< a< 1, то знак неравенства меняется на противоположный, т.е. $x < b$.

При решении логарифмических неравенств необходимо проверить, входит ли полученное решение в область определения неравенства.

Задание 21. Решить неравенство $\lg(x+1) \le 2$

Решение

$$\lg(x+1) \le 2 \qquad 2 = \lg 100$$
$$\lg(x+1) \le \lg 100$$
$$a = 10, \quad a \succ 1 \quad \Rightarrow \quad x+1 \le 100$$
$$x \le 99$$

Область определения: $x + 1 > 0$

$x > -1$

Общее решение: $\begin{cases} x \le 99, \\ x \succ -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \prec x \le 99$

Ответ: $-1 \prec x \le 99$

Задание 22. Решите неравенство: $\log_{0,5}(x^2+x-6) \ge \log_{0,5}(x+4)$

Решение. Начнем с определения области допустимых значений неравенства. Выражение, стоящее под знаком логарифмической функции, должно принимать только положительные значения. Это значит, что искомая область допустимых значений определяется следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 > 0, \\ x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty), \\ x > -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4; -3) \cup (2; +\infty).$$

Так как в основании логарифма стоит число, меньшее единицы, соответствующая логарифмическая функция будет убывающей, а потому равносильным по теореме 2 будет переход к следующему квадратичному неравенству:

$$x^2 + x - 6 \le \le x + 4 \Leftrightarrow x^2 \le 10 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{10}\ ;\ \sqrt{10}\ ].$$

Окончательно, с учетом области допустимых значений получаем ответ: $x \in [\,-\sqrt{10}\ ; -3) \cup (2; \sqrt{10})$

Раздел 3. Прямые и плоскости в пространстве

Содержание

Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Параллельность прямой и плоскости. Параллельность плоскостей. Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный угол. Угол между плоскостями. Перпендикулярность двух плоскостей.

Взаимное расположение прямых и плоскостей

Задание 23. Докажите, что если n прямых попарно пересекаются друг с другом, то они все лежат в одной плоскости.

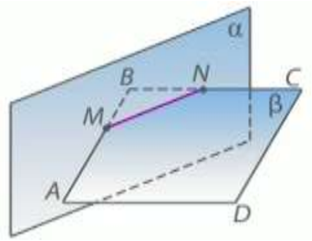
Доказательство. Для n=2 утверждение очевидно. Предположим, что утверждение верно для n прямых. Докажем, что тогда оно верно и для (n +1) прямых. Действительно, пусть P-плоскость в которой лежат все n прямых, a_1и a_2-любые две из них, а a_3 – (n+1)-я прямая. По предположению $a_{1,}$ a_{2} $_{,}a_3$ лежат в одной плоскости. Но эта плоскость должна совпадать с P , так как через a_1 и a_2 проходит только одна плоскость.

Параллельность прямых и плоскостей

Задание 24

Стороны AB и BC параллелограмма ABCD пересекают плоскость α. Докажите, что прямые AD и DC также пересекают плоскость α.

Дано: ABCD – параллелограмм, AB $\cap\ \alpha =$ M, BC $\cap\ \alpha =$N

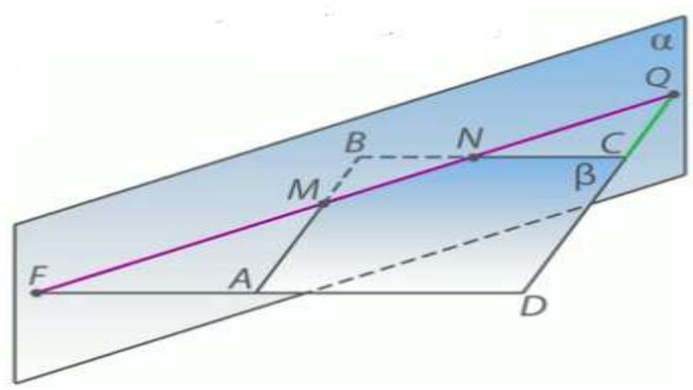


Доказать: прямые AD и DC пересекают плоскость α.

Доказательство: Обозначим плоскость ABC как β. Тогда плоскости α и β пересекаются по прямой MN.
Прямая AB пересекается с плоскостью α, и прямые AB и CD параллельны (как стороны параллелограмма). Тогда, согласно лемме, прямая CD также пересекается с плоскостью α.
Аналогично, прямая BC пересекается с плоскостью α, и прямые BC и AD параллельны (как стороны параллелограмма). Тогда, согласно лемме, прямая AD также пересекается с плоскостью α, что и требовалось доказать.

Давайте найдем эти точки пересечения. Пусть прямая CD пересекается с плоскостью α в точке Q, а прямая AD пересекается с плоскостью α в точке F.

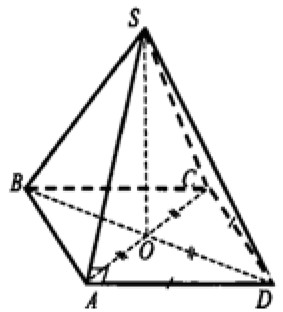
Плоскости α и β пересекаются по прямой MN, значит все их общие точки лежат на этой прямой. Продолжим прямые CD и AD до их пересечения с прямой MN и получим соответственно точки Q и F



Перпендикулярность прямых и плоскостей

Задание 25.

Диагонали квадрата ABCD пересекаются в точке О. SO – перпендикуляр к плоскости квадрата, SO= $4\sqrt{2}$ см. а) Докажите равенство углов, образуемых прямыми SA, SC и SD с плоскостью квадрата. б) Найдите эти углы, если периметр ABCD равен 32 см.



а) Доказательство:

1. SO $\perp$ (ABC), AC, SD, SA, SB – наклонные; OC,OD, OA, OB – их проекции; $\angle(SC,(ABC)) = \angle SCO$ определению; $\angle(SD,(ABC)) = \angle SDO$ и т.д.

2. $\Delta SOC = \Delta SOD = \Delta SOA = \Delta SOB$(как прямоугольные по двум катетам: SO – общая; OC=OA=OD=OB по свойству диагоналей квадрата).

3. $\angle SCO = \angle SDO = \angle SAO = \angle SBO$

б) Решение:

1. $P_{ABCD} = 4AD$, AD=8 см.

2. ΔADC, $\angle D = 90^0$, $AC = \sqrt{2AD^2} = AD\sqrt{2}$. AC=$8\sqrt{2}$ см.

3. OC=$\frac{1}{2}$ AC, OC=$4\sqrt{2}$ см.

4. $\Delta SOC, \angle O = 90^0$. $\text{tg}\angle C = \frac{OS}{OC}$, $\text{tg}\angle C = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$, $\text{tg}\angle C = 1$, $\angle C = 45^0$.

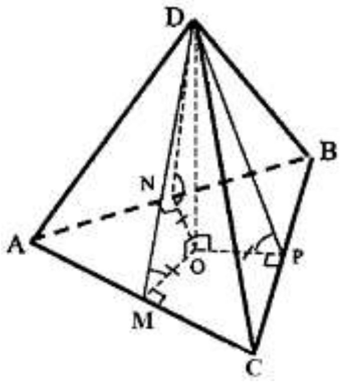
Ответ: $\angle(SA,(ABC)) = 45^0$

Задание 26.

В тетраэдре ABCD DO – перпендикуляр к (ABC). Докажите, что если перпендикуляры, проведенные из точки D к сторонам ΔABC, образуют равные углы с (ABC), то точка O – центр окружности, вписанной в ΔABC.

Дано: ABCD – тетраэдр, DO$\perp$(ABC), OM$\perp$AC, OP$\perp$CB, ON$\perp$AB, $\angle DMO = \angle DPO = \angle DNO$.

Доказать: O – центр окружности, вписанной в ΔABC.



Доказательство:

1. $\Delta DON = \Delta DOP = \Delta DOM$ (как прямоугольные по общему катет у и противолежащему острому углу).

2. OM=ON=OP

3. O – центр окружности, вписанной в ΔABC, так как она равноудалена от сторон ΔABC.

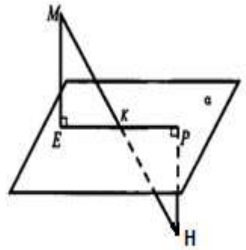
Задание 26.

Дано: α ,MH – отрезок, MH$\cap \alpha = K$;

HP$\perp \alpha$, HP$\cap \alpha$ = P, ME$\perp \alpha$, ME$\cap \alpha$ = E;

HP=4 см, HK=5см, ME=12см

Найдите: PE



Решение:

1. HP$\cap \alpha$ = P, то $P \in \alpha$

ME$\cap \alpha$ = E; то $E \in \alpha$

Тогда PE$\subset \alpha$.

2. HP$\perp \alpha$, ME$\perp \alpha$, PE$\subset \alpha \Rightarrow ME \perp PE, HP \perp PE$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости) и ME||HP (по теореме, обратной к теореме к теореме о связи между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости), тогда существует плоскость β, $ME \subset \beta$.

3. Так как $ME \perp PE, HP \perp PE$, то $\angle MEK = \angle HPK = 90^\circ$, а ΔMEK и ΔHPK прямоугольные.

4. ΔHPK: $HK^2 = HP^2 + KP^2$ (по теореме Пифагора). $KP^2 = HK^2 - HP^2$, $KP = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см)

5. $\angle EMK = \angle PHK$ (по свойству накрест лежащих углов, образованных параллельными прямыми ME и HP и секущей MH). Тогда $\Delta MEK \sim \Delta HPK$ и $\frac{ME}{HP} = \frac{EK}{PK}$ (по определению подобных треугольников); $\frac{12}{4} = \frac{EK}{3} \Rightarrow EK = \frac{12 \cdot 3}{4} = 9$ (см).

6. PE=PK+KE=3+9=12 (см).

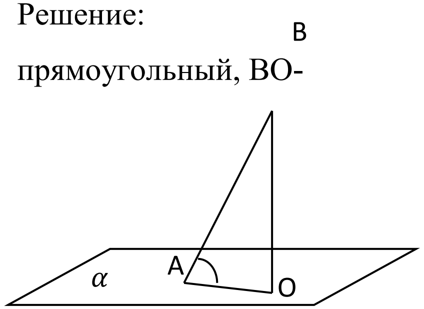
Ответ:12см.

Расстояния

Задание 27.

К плоскости α проведена наклонная AB (A∈α). Длина наклонной равна 8 см, наклонная с плоскостью образует угол 60°. Вычисли, на каком расстоянии от плоскости находится точка B.

Решение:



Рассмотрим треугольник ABO: прямоугольный, BO- расстояние от точки B до плоскости α, перпендикулярно AO. Следовательно угол B=30°, а AO =4 см, как катет лежащий против угла в 30°.

По теореме Пифагора:

$$BO^2 = AB^2 - AO^2$$

$$BO^2 = 8^2 - 4^2$$

$$BO = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ (см)}$$

Угол между прямой и плоскостью

Задание 28.

Отрезок AB длиной $6\sqrt{3}$ м, пересекает плоскость β в точке O. Расстояние от концов отрезка до плоскости соответственно равны 3 м и 6 м. Найди острый угол, который образует отрезок AB с плоскостью β.

Решение:

1. Пусть AO=x, тогда OB=$6\sqrt{3}$x.
2. ΔAPO подобен ΔBOK (угла при вершине O, равны как вертикальные, углы P и K , равны 90°).

$\frac{PA}{AO} = \frac{BK}{BO}$;

$\frac{3}{x} = \frac{6}{6\sqrt{3} - x}$;

$x = 2\sqrt{3}$;

3. Рассмотрим ΔAPO:

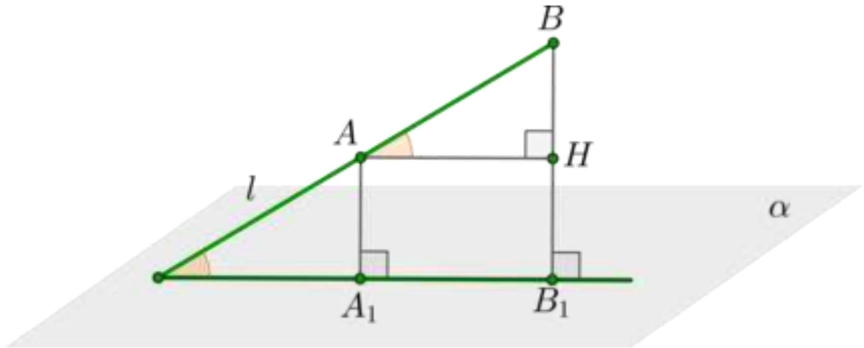
$$\sin \text{PAO} = \frac{\text{PA}}{\text{AO}}$$

$$\sin \text{PAO} = \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$< \text{PAO} = 60°$$

Ответ: 60^0

Задание29



Прямая l пересекает плоскость α. На прямой l отмечен отрезок AB=25, причем известно, что проекция этого отрезка на плоскость α равна 24. Найдите синус угла между прямой l и плоскостью α .

Пусть A_1B_1=24 – проекция AB на плоскость α, значит, $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$. Так как две прямые, перпендикулярные к плоскости, лежат в одной плоскости, то A_1ABB_1 – прямоугольная трапеция.

Проведем $AH \perp BB_1$. Тогда AH=A1B1=24. Следовательно, по теореме Пифагора HB=$\sqrt{AB^2 - AH^2}$=7. Заметим также, что угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и ее проекцией на плоскость, следовательно, искомый угол – угол между AB и A1B1. Так как AH∥A1B1, то угол между AB и A1B1 равен углу между AB и AH. Тогда sin ∠BAH=BHAB=725=0,28.

Раздел 4. Комбинаторика

Содержание

Основные понятия комбинаторики. Задачи на подсчет числа размещений, перестановок, сочетаний. Решение задач на перебор вариантов. Формула бинома Ньютона. Свойства биноминальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.

Повторные испытания

Задание 30.

Монету бросали 6 раз. В каком числе вариантов «орёл» упадёт хотя бы один, но не более трёх раз?

Решение: Нас устраивает следующее число раз выпадания «орла»:1,2,3.

$C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 = 6 + \frac{6\cdot 5}{2} + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{6}$ = 6+15+30 =41

Выборки

Задание 31. Каким числом способов можно составить команду из двух девочек и четырёх мальчиков, выбирая их из группы в 20 человек, в которой 12 мальчиков и 8 девочек.

Решение: $C_{12}^4 \cdot C_8^2 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{24} \cdot \frac{8\cdot 7}{2} = 11\cdot 10 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 7$

Задание 32.

Сколькими способами можно выбрать из колоды в 36 карт последовательность из четырёх карт различных мастей и достоинства?

Решение. Обратите внимание – речь идёт не о выборке из четырёх карт. А о последовательности. Карты различны, поэтому эти числа будут отличаться друг от друга множителем 4! = 24.Так как число карт и число мастей совпадает, то нужно думать только о том, как указать 4 разных достоинства из 9 возможных.

Получаем: $\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4!} \cdot 4! = 9\cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.

Перестановки

Задание 33. Сколькими способами можно расставлять на одной полке шесть различных книг?

Решение. Искомое число способов равно числу перестановок из 6 элементов, т.е.

$P_6 = 6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$.

Задание 34. Сколько вариантов распределения на практику в три ресторана различного профиля можно составить для пяти студентов?

Решение. Искомое число вариантов равно числу размещений из 5 элементов по 3 элемента, т.е.

$A_5^3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$.

Задание 35.

Слово из двух букв, ровно одна из которых согласная.

Решение. В слове одна согласная С и одна гласная Г. Зафиксируем сначала их порядок: СГ. Получаем $10\cdot 5 = 50$ вариантов. При другом порядке ГС: $5\cdot 10 = 50$ вариантов.

Ответ: 100.

Задание 36.

Каким числом способов можно выбрать две диагонали граней куба, не лежащие в параллельных плоскостях?

Решение. В формулировке задачи есть недосказанность. Если речь идёт о любых непараллельных плоскостях, то любые две непересекающиеся прямые можно разместить в двух параллельных плоскостях. Конечно, речь идёт о непараллельных гранях куба. Граней у куба 6, диагоналей граней 12.Для одной диагонали есть 4 грани, не параллельные той, в которой она лежит. В них 8 диагоналей. Число 12·
8 надо ещё поделить пополам, так как каждую пару мы выбираем два

Ответ:48.

Задание 37. Разложить бином $(1+x)^6$ по степеням x.

Решение: применяем формулу бинома Ньютона:

$(1+x)^6 = 1^6 + C_6^1 x + C_6^2 x^2 + C_6^3 x^3 + C_6^4 x^4 + C_6^5 x^5 + x^6$. Значения биномиальных коэффициентов находим последовательно по формуле $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$:

$$C_6^3 = C_5^2 + C_5^3 = \left(C_4^1 + C_4^2\right) + \left(C_4^2 + C_4^3\right) = 4 + 2\left(C_3^1 + C_3^2\right) + 4 = 4 + 12 +$$

Т.о. $(1+x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$.

Раздел 5. Координаты и векторы

Содержание

Задание точек координатами

Задание 38. Запишите в виде равенств или неравенств соотношения между координатами заданных точек.

1.На координатной оси Ox: а) точки, удалённые от P(-3) на расстояние 4.

Решение. Пусть x – координата искомой точки. Тогда выражение $|x-3|$=4 означает, что точка с координатой x находится на расстоянии 4 от точки P(-3);

б) точка, симметричная точке A(2) относительно точки B(8).

Решение. Точка A(2) находится слева от точки B(8), следовательно, симметричная точка будет находится справа, т.е.$|x-8|$ =6

в) точка, делящая отрезок [2.5] в соотношении 1: 2.

Решение. Пусть x – координата искомой точки. Тогда x-2 и 5-x – расстояния до концов отрезка.По условию имеем $\frac{x-2}{5-x} = \frac{1}{2}$

Задание 39.

В прямоугольной системе координат трехмерного пространства дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Известно, что $C_1(1;\ 1;\ 0)$, а $M(4;\ 2;\ -4)$ – середина диагонали BD_1. Найдите координаты точки A.
Решение: диагонали параллелограмма пересекаются в одной точке, и эта точка является серединой каждой из этих диагоналей. Таким образом, мы можем утверждать, что точка M является серединой отрезка AC_1 . Из формул для нахождения координат середины отрезка имеем:

$$x_M = \frac{x_A + x_{C_1}}{2} \Rightarrow x_A = 2x_M - x_{C_1} = 8 - 1 = 7,$$

$$y_M = \frac{y_A + y_{C_1}}{2} \Rightarrow y_A = 2y_M - y_{C_1} = 4 - 1 = 3,$$

$$z_M = \frac{z_A + z_{C_1}}{2} \Rightarrow z_A = 2z_M - z_{C_1} = -8 - 0 = -8.$$

.
Итак, точка A имеет координаты (7; 3; -8).

Задание 40. Найти расстояние от точки начала координат O до середины отрезка MN, если

M(-4;7;0) и N (0;-1;2)

Решение: M(-4;7;0) и N (0;-1;2)
X – середина отрезка MN

$x(\frac{-4+0}{2};\frac{7+(-1)}{2};\frac{0+2}{2})$
X(-2; 3;1) 0 (0;0;0)
OX = $\sqrt{(-2-0)^2+(3-0)^2+(1-0)^2}$
OX =$\sqrt{(-2)^2+3^2+1^2}$ =$\sqrt{14}$

Задание 41.По координатам точек A, B и C определить вид треугольника ABC.
A(9; 3; -5),B(2;10;-5), C(243;2) .

Решение:
Зная координаты вершин треугольника, мы можем вычислить длины всех его сторон.

AB =$\sqrt{(2-9)^2+(10-3)^2+(-5-(-5))^2}$
=$\sqrt{(-7)^2+7^2+0^2}$=$7\sqrt{2}$

BC =$\sqrt{(2-2)^2+(3-10)^2+(2-(-5))^2}$
=$\sqrt{0^2+(-7)^2+7^2}$=$7\sqrt{2}$

AC =$\sqrt{(2-9)^2+(3-3)^2+2-(-5))^2}$ =$\sqrt{(-7)^2+0^2+7^2}$=$7\sqrt{2}$

Отсюда следует треугольник ABC - правильный

Действия над векторами и их координатами

Задание 42.

Докажите, что точки A(1;1;2),B(4;5;-8), C(2;-1;0) и Д(-1;-5;10) являются вершинами параллелог**р**амма.

Решение.Нужно доказать, что противоположные стороны четырёхугольника АВСД равны и параллельны.Вычисляем координаты векторов: $\overrightarrow{AB}$=(3,4,-10), $\overrightarrow{СД}$=(-3,-4,10).

Видим, что векторы отличаются только направлением, а значит, они параллельны и их длины равны.

Задание 43.

Выразите вектор $\overrightarrow{ДС}$ через векторы a= $\overrightarrow{OA}$ и b= $\overrightarrow{OД}$, где О – точка пересечения диагоналей параллелограмма.

Решение. Так как $\overrightarrow{BC}$ соединяет концы векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, то $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$ - $\overrightarrow{OB}$.Но $\overrightarrow{OC}$ =-$\overrightarrow{OA}$ = -a, $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OД}$ = -b,

следовательно, $\overrightarrow{BC}$ = b- a

Скалярное произведение векторов

Задание 44. Даны четыре точки А(0;1;-1), В(1;-1;2), С(3;1;0),Д(2;-3;1).Найдите косинус угла α между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{СД}$.

Решение. Координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ будут 1- 0=1, -1-1= -2, 2 - (-1)=3;

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

Координатами вектора $\overrightarrow{СД}$ будут

2-3= -1, -3-1 = -4, 1- 0 =1;

$\left|\overrightarrow{СД}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{18}$.

Значит, $\cos\alpha = \frac{\overleftrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{СД}}{\left|\widehat{AB}\right|\cdot\left|\overline{СД}\right|} = \frac{1\cdot(-1)+(-2)\cdot(-4)+3\cdot1}{\sqrt{14}\sqrt{18}} = \frac{5}{\sqrt{63}}$

Раздел 6. Основы тригонометрии

Содержание

Радианная мера угла. Вращательное движение. Синус, косинус, тангенс и котангенс числа.
Формулы приведения. Формулы сложения. Формулы удвоения Формулы поло-
винного угла.
Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента.
Простейшие тригонометрические уравнения. Простейшие тригонометрические неравенства.
Обратные тригонометрические функции. Арксинус, арккосинус, арктангенс.

Углы и вращательное движение

Задание 45. Выполнить переход от радианной меры углов к градусной

<u>Решение</u>
Выразить в градусах 4,5 рад.

Так как 1 рад.=$\frac{180^0}{\pi}$, то 4,5 рад.= $4,5 \cdot \frac{180^0}{\pi} = \frac{810^0}{\pi} \approx 258^0$

Задание 46.

Выполнить переход от градусной меры углов к радианной

Решение

Найти радианную меру угла 72 °

Так как $1^0 = \frac{\pi}{180}$ рад, то $72^0 = 72 \cdot \frac{\pi}{180}$ рад=$\frac{2\pi}{5}$ рад $\approx$ 1,3 рад

При записи радианной меры угла, обозначение «рад» часто опускают и записывают $72^0 = \frac{2\pi}{5}$

Связь между значениями тригонометрических функций

Задание 47. Найдите значение $\sin\alpha$, $tg\ \alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение: $tg\alpha = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow$

$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$

$$\Rightarrow \sin x = \sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25-16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$tg\alpha = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} : \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = -\frac{3}{4}$$

Задание 48.

Найдите значение $\cos\frac{8\pi}{3}$.

$$\cos\frac{8\pi}{3} = \cos\left(\frac{6\pi+2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\frac{3\pi-\pi}{3}\right) =$$

$$= \cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

Задание 49.

Найдите значение $\sin 300°$.

Решение: $\sin 300° = \sin(90° + 210°) = \cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Задание 50.

Доказать тождество: $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{1+\sin\sigma}{\cos\alpha}$

Доказательство: $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - \frac{1+\sin\sigma}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)} =$

$\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)} = 0$

Обратные тригонометрические функции. Арксинус, арккосинус, арктангенс. Задание 51. Вычислите:

$2arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + arcctg1$.

Решение.

$$2\,arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+arcctg1=$$

$$=-2\,arcsin\frac{1}{2}+\left(\pi-arccos\frac{1}{2}\right)+arctg1=-2\cdot\frac{\pi}{6}+\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}$$

.

Тригонометрические уравнения

Задание 52. Решите уравнение: $\sin\left(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение: функция синус нечетная, поэтому $\sin\left(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)$=-sin $\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}\right)$=-$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тогда по формуле: $\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=(-1)^k\cdot\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k$, (k Є **Z**).

Т.к. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$, имеем $\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=(-1)^k(-\frac{\pi}{4})+\pi k$, (k Є **Z**)

или $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{10}+(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k$, (k Є **Z**).

Умножив обе части уравнения на 2, получим ответ:

$x=\frac{\pi}{5}+(-1)^{k+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\pi k$, (k Є

Задание 53.

Решите уравнение: 2 sinx+ 3 cosx = 0.

Решение:

2 sin x+ 3 cos x = 0 | :cos x $\neq$ 0

2 tg x + 3 =0

tg x = -1,5

x= arctg (-1,5) + πk, k $\in$ Z или x = - arctg 1,5 + πk, k $\in$ Z

Ответ: - arctg 1,5 + πk, k $\in$ Z

Задание 54.

Решите уравнение: 2 $\sin^2$ x - 3 sinxcos x - 5 $\cos^2$x =0

Решение: 2 $\sin^2$ x - 3 sinxcos x - 5 $\cos^2$x =0

2 $\sin^2$ x - 3 sinx cos x - 5 $\cos^2$x =0 | :$\cos^2$x $\neq$ 0

2 tg^2x - 3 tgx - 5 = 0

замена tgx = t

2 t^2 – 3 t – 5 =0

$t_1 = -1$; $t_2 = 2,5$

Решением уравнения tg x = -1 являются числа вида $x = -\pi/2 + \pi k$, $k \in Z$.

Решением уравнение tg x = 2,5 являются числа вида $x = \operatorname{arctg} 2,5 + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $-\pi/2 + \pi k$, $\operatorname{arctg} 2,5 + \pi n$, $n, k \in Z$.

Задание 55.

Решите уравнение: $\cos(2x-\pi/4)=1/2$.

Решение:

по формуле

$2x-\pi/4=\pm\arccos(1/2)+2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$).

Поскольку $\arccos(1/2)=\pi/3$ получаем

$2x-\pi/4=\pm \pi/3+2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$)

$2x=\pi/4\pm \pi/3+2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$)

Разделив обе части уравнения на 2 получим ответ: $x=\pi/8\pm\pi/6+\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$)